

【 I 】

〔解答〕

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
最大	A	A	C	B	C
最小	B	C	B	A	A

〔解説〕

(1) $\vec{a} = (-2, 1), \vec{b} = (1, -3)$ より $\vec{a} + 2\vec{b} = (0, -5), 2\vec{a} + \vec{b} = (-3, -1), 2\vec{a} + 2\vec{b} = 2(-1, -2)$ であるから、

$$\begin{aligned} |\vec{a} + 2\vec{b}| &= 5 \\ |2\vec{a} + \vec{b}| &= \sqrt{(-3)^2 + (-1)^2} = \sqrt{10} \\ |2\vec{a} + 2\vec{b}| &= 2\sqrt{(-1)^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{5} \end{aligned}$$
 である。したがって、 $\sqrt{2} < 2 < \sqrt{5}$ より、 $|2\vec{a} + \vec{b}| < |2\vec{a} + 2\vec{b}| < |\vec{a} + 2\vec{b}|$ である。

(2)

$$\begin{aligned} \int_{-1}^2 (-2x+2) dx &= \left[-x^2 + 2x \right]_{-1}^2 \\ &= -4 + 4 - (-1 - 2) \\ &= 3 \\ \int_{-1}^2 |-x| dx &= \int_{-1}^0 (-x) dx + \int_0^2 x dx \\ &= \left[-\frac{1}{2}x^2 \right]_{-1}^0 + \left[\frac{1}{2}x^2 \right]_0^2 \\ &= 0 - \left(-\frac{1}{2} \right) + 2 - 0 \\ &= \frac{5}{2} \\ \int_{-1}^2 (-x^2+1) dx &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + x \right]_{-1}^2 \\ &= -\frac{8}{3} + 2 - \left(\frac{1}{3} - 1 \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

より $\int_{-1}^2 (-x^2+1) dx < \int_{-1}^2 |-x| dx < \int_{-1}^2 (-2x+2) dx$ である。

(3) A, B, C はいずれも 0° 以上 90° 以下より

$$\begin{aligned} \sin A &= \cos A \Leftrightarrow A = 45^\circ \\ \sin B &< \cos B \Leftrightarrow 0^\circ \leq B < 45^\circ \\ \sin C &< \cos C \Leftrightarrow 45^\circ < C \leq 90^\circ \end{aligned}$$
 であるため、 $B < A < C$ である。

(4) $n(A \cap C) = n(A)$ より A は C の部分集合であり、 $n(\overline{B} \cap C) = 0 \Leftrightarrow n(B \cap C) = n(C)$ より C は B の部分集合である。したがって、 $n(A) \neq n(C), n(B) \neq n(C)$ より、 $n(A) < n(C) < n(B)$ である。

(5) A, B, C において2つの変量 X, Y からなるデータの要素はいずれも $1, 2, 3, 4, 5$ であるため、 X, Y のデータの平均値はいずれも 3 であり、分散はいずれも $\frac{1}{5} \sum_{k=1}^5 (k-3)^2 = 2$ である。したがって、 A, B, C の相関係数をそれぞれ r_A, r_B, r_C とおくと、

$$\begin{aligned} r_A &= \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} \cdot \frac{1}{5} \{ (1-3)(5-3) + (2-3)(4-3) + (3-3)(3-3) + (4-3)(2-3) + (5-3)(1-3) \} \\ &= -1 \\ r_B &= \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} \cdot \frac{1}{5} \{ (1-3)(2-3) + (2-3)(1-3) + (3-3)(4-3) + (4-3)(3-3) + (5-3)(5-3) \} \\ &= 0.8 \\ r_C &= \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} \cdot \frac{1}{5} \{ (1-3)(1-3) + (2-3)(2-3) + (3-3)(3-3) + (4-3)(4-3) + (5-3)(5-3) \} \\ &= 1 \end{aligned}$$

となるから、 $r_A < r_B < r_C$ である。

〔Ⅱ〕

〔解答〕

(1)	ア	6
	イ	8
	ウ	4
(2)	エ	3
	オ	2
	カ	7
	キ	2
(3)	ク	2
	ケ	5
	コ	8

〔解説〕

(1)

a, b は整数より、 x の 3 次方程式 $x^3 - ax^2 + 10x - b = 0$ の $x = 1 \pm i$ 以外の解は実数であり、これを k (k は実数) とおく。 $k, 1 \pm i$ は x の 3 次方程式 $x^3 - ax^2 + 10x - b = 0$ の解であるから、解と係数の関係より

$$\begin{cases} k + (1+i) + (1-i) = a \\ k(1+i) + k(1-i) + (1+i)(1-i) = 10 \\ k(1+i)(1-i) = b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k + 2 = a \\ 2k + 2 = 10 \\ 2k = b \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} k = 4 \\ a = 6 \\ b = 8 \end{cases}$$

である。したがって、 $a = 6, b = 8$ である。また、他の解は $x = 4$ である。

(2)

$\frac{5}{2} \leq x \leq \frac{9}{2}$ において $5 - x > 0, x - 2 > 0$ である。このとき、

$$\begin{aligned} y &= \log_2(5-x) + \log_8(x-2)^3 \\ &= \log_2(5-x) + \frac{3\log_2(x-2)}{\log_2 8} \\ &= \log_2(5-x)(x-2) \\ &= \log_2 \left\{ -\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + \frac{9}{4} \right\} \end{aligned}$$

となるから、 y の最大値は $\log_2 \frac{9}{4} = 2\log_2 3 - 2$ である。また、このときの x の値は $\frac{7}{2}$ である。

(3)

異なる正の整数 a, b, c はこの順に等差数列をなすため $b - a = c - b$ であり、 $2b, 10a, 5c$ はこの順に等比数列をなすため $\frac{5a}{b} = \frac{c}{2a}$ ($\because a > 0, b > 0$) である。また、与えられた条件より $abc = 80$ であるから、

$$\begin{cases} b - a = c - b \\ \frac{5a}{b} = \frac{c}{2a} \\ abc = 80 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2b = a + c \\ bc = 10a^2 \\ abc = 80 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2b = a + c \\ bc = 10a^2 \\ 10a^3 = 80 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2b = 2 + c \\ bc = 40 \quad (\because a > 0) \\ a = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c = 2(b-1) \\ (b-1)b = 20 \\ a = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c = 2(b-1) \\ (b+4)(b-5) = 20 \\ a = 2 \end{cases}$$

$$\therefore (a, b, c) = (2, 5, 8) \quad (\because b > 0)$$

である。

〔Ⅲ〕

〔解答〕

(1)	$y = 2mx - m^2$
(2)	$\left(\frac{m+n}{2}, mn\right)$

(3)

曲線 C は下に凸な放物線より、接線 l_1, l_2 は曲線 C より下側にある。したがって、求める面積 S は

$$\begin{aligned}
 S &= \int_m^{\frac{m+n}{2}} (x^2 - 2mx + m^2) dx + \int_{\frac{m+n}{2}}^n (x^2 - 2nx + n^2) dx \\
 &= \int_m^{\frac{m+n}{2}} (x-m)^2 dx + \int_{\frac{m+n}{2}}^n (x-n)^2 dx \\
 &= \left[\frac{1}{3} (x-m)^3 \right]_m^{\frac{m+n}{2}} + \left[\frac{1}{3} (x-n)^3 \right]_{\frac{m+n}{2}}^n \\
 &= \frac{1}{3} \left(\frac{n-m}{2} \right)^3 - \frac{1}{3} \left(\frac{m-n}{2} \right)^3 \\
 &= \frac{1}{12} (n-m)^3
 \end{aligned}$$

である。

(答) $\frac{1}{12} (n-m)^3$

(4)

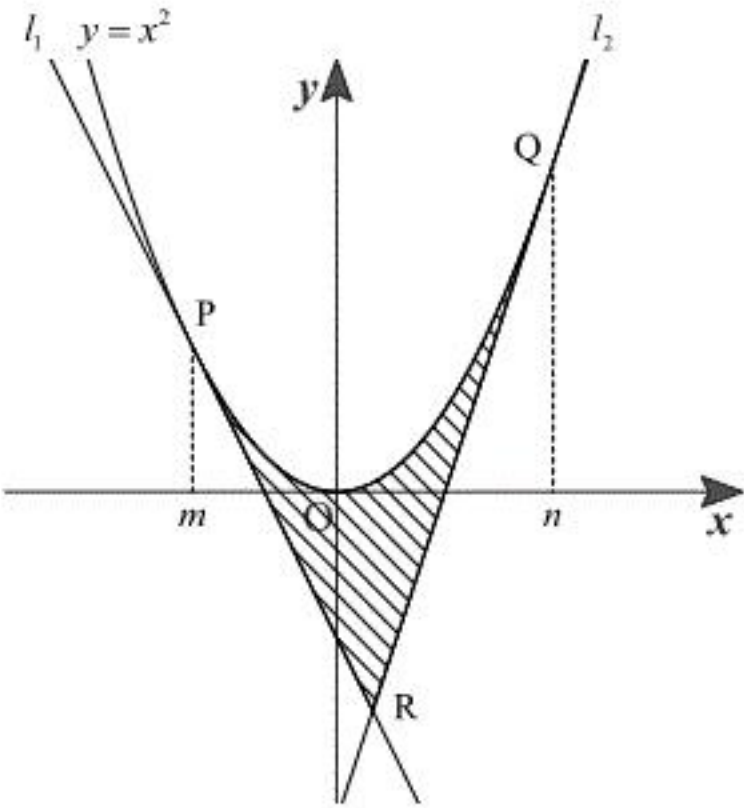
(2)の結果より、交点 R が直線 $y = 2x - 3$ 上にあるとき $mn = m + n - 3$ が成り立つ。したがって、 m, n がともに整数であるとき、

$$\begin{aligned}
 mn &= m + n - 3 \\
 \Leftrightarrow (m-1)(n-1) &= -2 \\
 \Leftrightarrow (m-1, n-1) &= (-2, 1), (-1, 2) \quad (\because m < n) \\
 \Leftrightarrow (m, n) &= (-1, 2), (0, 3)
 \end{aligned}$$

である。

(答) $(m, n) = (-1, 2), (0, 3)$

〔解説〕



(1)

$(x^2)' = 2x$ より、接線 l_1 は点 $P(m, m^2)$ を通り、傾きが $2m$ の直線であるから、その方程式は

$$\begin{aligned}
 y &= 2m(x-m) + m^2 \\
 \therefore y &= 2mx - m^2
 \end{aligned}$$

である。

(2)

(1)と同様に考えると、 l_2 の方程式は $y = 2nx - n^2$ である。したがって、 l_1 と l_2 の交点 R の x 座標は

$$\begin{aligned}
 2mx - m^2 &= 2nx - n^2 \\
 \Leftrightarrow 2(m-n)x &= m^2 - n^2 \\
 \therefore x &= \frac{m+n}{2} \quad (\because m < n)
 \end{aligned}$$

であり、交点 R の y 座標は

$$2m \cdot \frac{m+n}{2} - m^2 = mn$$

であるから、 $R\left(\frac{m+n}{2}, mn\right)$ である。

[IV]

(1)

連続する2つの整数の積は整数 n を用いて $n(n+1)$ と表せる。 n と $n+1$ の偶奇は異なるため、 $n, n+1$ の一方は偶数となり、 $n(n+1)$ は2の倍数である。したがって、連続する2つの整数の積は2の倍数である。

(証明終)

(2)

$n^3 - n = (n-1)n(n+1)$ より、 $n^3 - n$ は連続する3つの整数の積である。 $n-1, n, n+1$ を3で割った余りはそれぞれ異なるため、 $n-1, n, n+1$ のうちの1つは3の倍数となり、 $n^3 - n$ は3の倍数である。また、(1)の結果より $n(n+1)$ は2の倍数であるから、 $n^3 - n$ は2の倍数でもある。したがって、2と3は互いに素より、 $n^3 - n$ は6の倍数である。

(証明終)

(3)

$n^5 - n = n(n^2 - 1)(n^2 + 1)$ と変形できる。ここで、 n は整数より $n \equiv 0, \pm 1, \pm 2 \pmod{5}$ と表せる。以下、5を法として考える。 $n \equiv 0$ のとき

$$\begin{aligned} n(n^2 - 1)(n^2 + 1) &\equiv 0 \cdot (-1) \cdot 1 \\ &\equiv 0 \end{aligned}$$

である。 $n \equiv \pm 1$ のとき

$$\begin{aligned} n(n^2 - 1)(n^2 + 1) &\equiv \pm 1 \cdot 0 \cdot 2 \\ &\equiv 0 \end{aligned}$$

である。 $n \equiv \pm 2$ のとき

$$\begin{aligned} n(n^2 - 1)(n^2 + 1) &\equiv \pm 2 \cdot 3 \cdot 5 \\ &\equiv 0 \end{aligned}$$

である。以上より、 $n^5 - n$ は5の倍数である。

(証明終)

(4)

$$9n^5 + 15n^4 + 10n^3 - 4n = n(n+1)(9n^3 + 6n^2 + 4n - 4)$$

と因数分解でき、 $9n^3 + 6n^2 + 4n - 4$ は整数であるから、(1)の結果より $9n^5 + 15n^4 + 10n^3 - 4n$ は2の倍数である。また、

$$\begin{aligned} 9n^5 + 15n^4 + 10n^3 - 4n &= 9(n^5 - n) + 15n^4 + 10n^3 + 5n \\ &= 9(n^5 - n) + 15n^3(n+1) - 5(n^3 - n) \end{aligned}$$

と変形できる。(3)の結果より $n^5 - n$ は5の倍数であり、3と5は互いに素であるから

$9(n^5 - n)$ は15の倍数である。同様に、(2)の結果より $n^3 - n$ は3の倍数であり、3と5は互いに

素であるから $5(n^3 - n)$ は15の倍数である。また、 $n^3(n+1)$ は整数より $15n^3(n+1)$ も15の倍数である。以上より、 $9n^5 + 15n^4 + 10n^3 - 4n$ は2の倍数かつ15の倍数であり、2と15は互いに素であるから、 $9n^5 + 15n^4 + 10n^3 - 4n$ は30の倍数である。

(証明終)

【V】

【解答】

(1)

$\frac{1}{4}$

(2)

(1)と同様に考えると、Bが決勝に進む確率は $\frac{1}{2}$ である。決勝でBが先に2勝するのは、Bが2連勝したとき、あるいは2試合目まで1勝1敗で3試合目にBが勝つときであるから、その確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + {}_2C_1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

である。したがって、Bが優勝する確率は

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

である。

(答) $\frac{1}{4}$

(3)

Aが優勝する確率を求める。D, Eのチーム力はどちらも1より、AがDまたはEとの対戦で勝利する確率はどちらも

$$\frac{3}{3+1} = \frac{3}{4} \qquad \cdots \textcircled{1}$$

であるから、Aが決勝に進む確率は $\frac{3}{4}$ である。また、B, Cのチーム力はどちらも2より、AがBまたはCとの試合で勝利する確率はどちらも

$$\frac{3}{3+2} = \frac{3}{5}$$

である。したがって、(2)と同様に考えると、決勝でAが先に2勝する確率は

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 + {}_2C_1 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^2 \cdot \frac{2}{5} = \frac{81}{125}$$

である。以上より、Aが優勝する確率は

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{81}{125} = \frac{243}{500}$$

である。以下、Dが優勝する確率を求める。D, Eのチーム力はどちらも1より、DがEとの対戦で勝利する確率は $\frac{1}{2}$ である。①より、DがAとの対戦で勝利する確率は

$$1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

である。また、B, Cのチーム力はどちらも2より、DがBまたはCとの試合で勝利する確率はどちらも

$$\frac{1}{1+2} = \frac{1}{3}$$

である。したがって、(2)と同様に考えると、決勝でDが先に2勝する確率は

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2 + {}_2C_1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{7}{27}$$

である。以上より、Dが優勝する確率は

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{7}{27} = \frac{7}{216}$$

である。

(答) Aが優勝する確率： $\frac{243}{500}$ ，Dが優勝する確率： $\frac{7}{216}$

(4)

B, CおよびD, Eのチーム力はそれぞれ等しいため、トーナメントの対称性よりBが優勝する確率とCが優勝する確率、およびDが優勝する確率とEが優勝する確率はそれぞれ等しい。したがって、(3)の結果よりBが優勝する確率は

$$\frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{243}{500} - \frac{7}{216} \cdot 2\right) = \frac{758}{3375}$$

である。

(答) $\frac{758}{3375}$

(5)

Aのチーム力を a (a は1以上の整数)とおく。D, Eのチーム力はどちらも1より、DがEとの対戦で勝利する確率は $\frac{1}{2}$ である。DがAと対戦して勝利する確率は $\frac{2}{a+2}$ である。また、B, Cのチーム力はどちらも3より、DがBまたはCとの試合で勝利する確率はどちらも

$$\frac{2}{3+2} = \frac{2}{5}$$

である。したがって、(2)と同様に考えると、決勝でDが先に2勝する確率は

$$\left(\frac{2}{5}\right)^2 + {}_2C_1 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^2 \cdot \frac{3}{5} = \frac{44}{125}$$

である。以上より、Dが優勝する確率は

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{a+2} \cdot \frac{44}{125} = \frac{44}{125(a+2)}$$

と表せる。よって、Dが優勝する確率が $\frac{1}{20}$ 以上になるとき

$$\frac{44}{125(a+2)} \geq \frac{1}{20}$$

$$\Leftrightarrow a+2 \leq \frac{176}{25}$$

$$\therefore a \leq \frac{126}{25}$$

より、Aのチーム力 a の範囲は1以上5以下の整数である。

(答) 1以上5以下の整数

【解説】

(1)

A～Eのチーム力がすべて等しいとき、すべての対戦でどちらのチームも勝利する確率は $\frac{1}{2}$ である。したがって、Bが優勝するのはCとの対戦で勝利し、かつ決勝で勝利したときであるから、Bが優勝する確率は

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

である。