

【I】

【解答】

(1)	ア	イ	ウ
	7	1	8
(2)	エ	オ	カ
	7	1	2
(3)	キ	ク	ケ
	7	1	8
(4)	コ	サ	
	1	2	
(5)	シ	ス	セ
	5	3	6

【解説】

(1) サイコロの目の出方 (a, b) は全部で 6^2 通りあり、これらは同様に確からしい。 a, b は 1 以上 6 以下の整数より $\frac{1}{6} \leq \frac{a}{b} \leq 6$ であるから、 $\frac{a}{b}$ が整数となるのは $\frac{a}{b} = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ のときである。したがって、 $\frac{a}{b}$ が整数となるような (a, b) は

$$(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6), \\ (2, 1), (4, 2), (6, 3), (3, 1), (6, 2), (4, 1), (5, 1), (6, 1)$$

の 14 通りである。よって、求める確率は

$$\frac{14}{6^2} = \frac{7}{18}$$

である。

(2) a, b は整数であるから、 2^{a-b} が整数となる条件は、 $a-b \geq 0 \Leftrightarrow a \geq b$ である。このとき、 $a=b$ となる確率は $6 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{6}$ である。また、 a, b に関する対称性より、 $a < b$ となる確率と $a > b$ となる確率は等しい。この確率を p ($0 \leq p \leq 1$) とおくと、

$$\frac{1}{6} + p + p = 1 \\ \Leftrightarrow p = \frac{5}{12}$$

である。よって、求める確率は

$$\frac{1}{6} + \frac{5}{12} = \frac{7}{12}$$

である。

(3) $\log_2 \frac{a}{b}$ が整数となる条件は、整数 k を用いて $\frac{a}{b} = 2^k$ と表せることである。このとき、 $\frac{1}{6} \leq \frac{a}{b} \leq 6$ より k の取りうる値の範囲は、 $-2 \leq k \leq 2$ である。 $k=2$ のとき、 $a=4b$ より $(a, b) = (4, 1)$ の 1 通りである。 $k=1$ のとき、 $a=2b$ より $(a, b) = (2, 1), (4, 2), (6, 3)$ の 3 通りである。 $k=0$ のとき、 $a=b$ より $(a, b) = (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)$ の 6 通りある。 a, b に関する対称性より、 $k=-1$ のときは $k=1$ のときと同じく 3 通り、 $k=-2$ のときは $k=2$ のときと同じく 1 通りである。以上より、 $\log_2 \frac{a}{b}$ が整数となるような (a, b) は $1+3+6+3+1=14$ (通り) であるから、求める確率は

$$\frac{14}{6^2} = \frac{7}{18}$$

である。

(4) $\int_b^a x dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_b^a = \frac{a^2 - b^2}{2}$ より、 $\int_b^a x dx$ が整数となる条件は、 $a^2 - b^2$ が偶数となること、すなわち a, b の偶奇が一致することである。 a, b がともに偶数である確率は $\left(\frac{3}{6}\right)^2$ 、奇数である確率も $\left(\frac{3}{6}\right)^2$ であるから、求める確率は

$$\left(\frac{3}{6}\right)^2 + \left(\frac{3}{6}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

である。

(5) $n=1, 2, \dots, 6$ のとき、 $\sin \frac{\pi}{n}, \cos \frac{\pi}{n}$ の値は次表のようになる。

n	1	2	3	4	5	6
$\sin \frac{\pi}{n}$	0	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{1}{2}$
$\cos \frac{\pi}{n}$	-1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1+\sqrt{5}}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

よって、 $\sin \frac{\pi}{a} + \cos \frac{\pi}{b}$ が整数となるような (a, b) は

$$(a, b) = (1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (6, 3)$$

の 5 通りである。したがって、求める確率は

$$\frac{5}{6^2} = \frac{5}{36}$$

である。

【Ⅱ】

【解答】

(1)	ソ	タ	チ	ツ	テ	ト	ナ	ニ	
	1	5	4	1	0	2	5	2	
(2)	ヌ	ネ	ノ	ハ	ヒ	フ	ヘ	ホ	マ
	1	5	2	3	5	4	3	5	4
(3)	ミ	ム	メ	モ	ヤ	ユ	ヨ	ラ	リ
	3	5	2	3	5	2	3	5	2

【解説】

(1)

三角形 OAB において余弦定理より、

$$\begin{aligned}\cos \angle \mathrm{AOB} &= \frac{\mathrm{OA}^2 + \mathrm{OB}^2 - \mathrm{AB}^2}{2 \cdot \mathrm{OA} \cdot \mathrm{OB}} \\ &= \frac{4 + 4 - (\sqrt{5} - 1)^2}{2 \cdot 2 \cdot 2} \\ &= \frac{1 + \sqrt{5}}{4}\end{aligned}$$

となる。よって、 $0 < \angle \mathrm{AOB} < \pi$ より $\sin \angle \mathrm{AOB} > 0$ であるから、

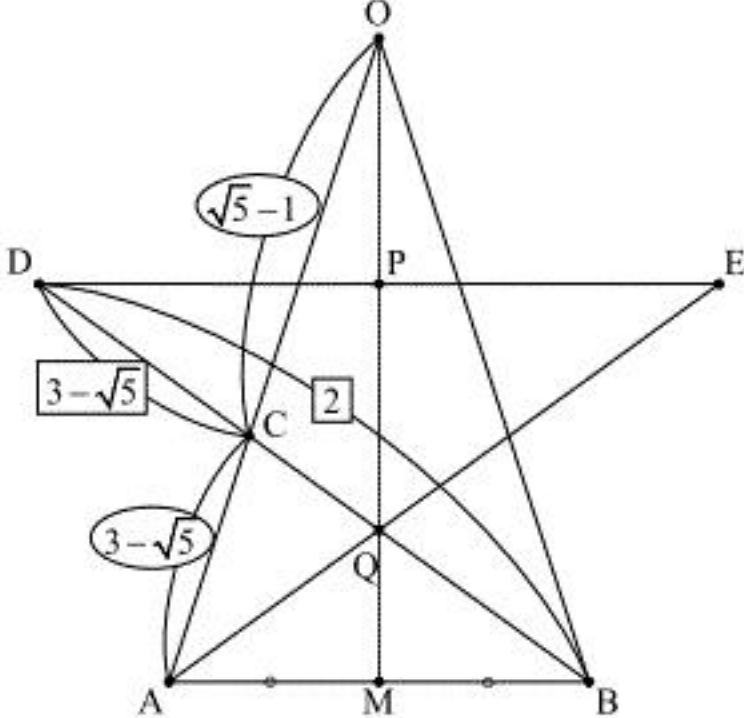
$$\begin{aligned}\sin \angle \mathrm{AOB} &= \sqrt{1 - \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{4}\right)^2} \\ &= \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}\end{aligned}$$

である。したがって、

$$\begin{aligned}\triangle \mathrm{OAB} &= \frac{1}{2} \cdot \mathrm{OA} \cdot \mathrm{OB} \cdot \sin \angle \mathrm{AOB} \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4} \\ &= \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{2}\end{aligned}$$

となる。

(2)



C は線分 OA を $\sqrt{5}-1:3-\sqrt{5}$ に内分する点であるから、

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \frac{\sqrt{5}-1}{(\sqrt{5}-1)+(3-\sqrt{5})} \vec{a} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \vec{a}$$

である。また、D は線分 BC を $2:3-\sqrt{5}$ に外分する点であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OD}} &= \frac{2\overrightarrow{\mathrm{OC}} - (3-\sqrt{5})\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{2 - (3-\sqrt{5})} \\ &= \frac{2}{\sqrt{5}-1} \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{2} \vec{a} + \frac{\sqrt{5}-3}{\sqrt{5}-1} \vec{b} \\ &= \vec{a} + \frac{1-\sqrt{5}}{2} \vec{b}\end{aligned}$$

である。上図より、図形は直線 OM に関して対称であり、D と E は直線 OM に関して対称な位置にあるから、

$$\overrightarrow{\mathrm{OE}} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \vec{a} + \vec{b}$$

となる。したがって、

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{OD}} + \overrightarrow{\mathrm{OE}}}{2} = \frac{3-\sqrt{5}}{4} \vec{a} + \frac{3-\sqrt{5}}{4} \vec{b}$$

である。

(3)

Q は直線 AE 上に存在するから、実数 t を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OQ}} &= (1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OE}} \\ &= (1-t)\vec{a} + t\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \vec{a} + \vec{b}\right) \\ &= \left(1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2} t\right) \vec{a} + t\vec{b}\end{aligned}$$

と表せる。また、

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \frac{1}{2} \vec{a} + \frac{1}{2} \vec{b}$$

であり、Q は直線 OM 上に存在するから、実数 k を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OQ}} &= k\overrightarrow{\mathrm{OM}} \\ &= \frac{1}{2} k \vec{a} + \frac{1}{2} k \vec{b}\end{aligned}$$

と表せる。したがって、 $\vec{a}, \vec{b}$ は 1 次独立であるから、係数を比較して、

$$\begin{aligned}\begin{cases} \frac{1}{2} k = 1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2} t \\ \frac{1}{2} k = t \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \\ k = 3-\sqrt{5} \end{cases}\end{aligned}$$

となる。したがって、 $\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = (3-\sqrt{5})\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ より、 $\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \vec{a} + \frac{3-\sqrt{5}}{2} \vec{b}$ であり、 $\frac{\mathrm{OQ}}{\mathrm{OM}} = 3-\sqrt{5}$

となるから、

$$\begin{aligned}\triangle \mathrm{OAQ} &= \frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{AB}} \cdot \frac{\mathrm{OQ}}{\mathrm{OM}} \cdot \triangle \mathrm{OAB} \\ &= \frac{1}{2} \cdot (3-\sqrt{5}) \cdot \triangle \mathrm{OAB} \\ &= \frac{3-\sqrt{5}}{2} \triangle \mathrm{OAB}\end{aligned}$$

である。したがって、三角形 OAQ の面積は三角形 OAB の面積の $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ 倍である。

【Ⅲ】

【解答】

(1)	ル	レ	ロ	ヲ
	0	3	1	0
(2)	$b = \frac{a+3}{2}$			
(3)	$\frac{1}{8} < a < \frac{5}{4}$			
(4)	$y = -x + \frac{5}{2}$			

【解説】

(1)

円 C_1 は点 $(1, 0)$, $(1, 6)$, $(3, 2)$ を通るから

$$\begin{cases} 1+0-2a-0-a^2+8a+4b^2-10=0 & \cdots \textcircled{1} \\ 1+36-2a-24b-a^2+8a+4b^2-10=0 & \cdots \textcircled{2} \\ 9+4-6a-8b-a^2+8a+4b^2-10=0 & \cdots \textcircled{3} \end{cases}$$

が成り立つ。 $\textcircled{2}-\textcircled{1}$ より $36-24b=0$ 、 $\textcircled{3}-\textcircled{1}$ より $12-4a-8b=0$ が得られるから、

$$\begin{cases} 36-24b=0 \\ 12-4a-8b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=\frac{3}{2} \end{cases}$$

である。 $a=0, b=\frac{3}{2}$ を $\textcircled{1}$ の左辺に代入すると、

$$1+4\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2-10=0$$

となり、確かに $\textcircled{1}$ を満たすから、

$$\textcircled{1}\text{かつ}\textcircled{2}\text{かつ}\textcircled{3} \Leftrightarrow a=0, b=\frac{3}{2}$$

である。 $a=0, b=\frac{3}{2}$ のとき、 C_1 は

$$x^2+y^2-6y-1=0 \Leftrightarrow x^2+(y-3)^2=10$$

となるから、円 C_1 の中心は $(0, 3)$ 、半径は $\sqrt{10}$ である。

(2)

$$\begin{aligned} x^2+y^2-2ax-4by-a^2+8a+4b^2-10 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-a)^2+(y-2b)^2 &= 2a^2-8a+10 \end{aligned}$$

と変形できる。このとき、

$$\begin{aligned} 2a^2-8a+10 &= 2(a^2-4a+5) \\ &= 2(a-2)^2+2 \\ &> 2 \end{aligned}$$

であるから、円 C_1 の中心は $(a, 2b)$ 、半径は $\sqrt{2a^2-8a+10}$ である。したがって、中心が直線

$y=x+3$ 上にあるとき、

$$2b=a+3 \Leftrightarrow b=\frac{a+3}{2}$$

である。

(3)

$$\begin{aligned} x^2+y^2+2x-4y+3 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x+1)^2+(y-2)^2 &= 2 \end{aligned}$$

より、円 C_2 の中心は $(-1, 2)$ 、半径は $\sqrt{2}$ である。したがって、円 C_1 と C_2 が異なる2点で交わ

るための条件は、円 C_1 と C_2 の半径と2円の中心間距離に注目して、

$$\left| \sqrt{2a^2-8a+10}-\sqrt{2} \right| < \sqrt{(a+1)^2+(2b-2)^2} < \sqrt{2a^2-8a+10}+\sqrt{2}$$

である。(2)より、 $\sqrt{2a^2-8a+10}>\sqrt{2}$ より絶対値を外した上で、 $b=\frac{a+3}{2}$ を代入すると、

$$\begin{aligned} \sqrt{2a^2-8a+10}-\sqrt{2} &< \sqrt{(a+1)^2+(a+1)^2} < \sqrt{2a^2-8a+10}+\sqrt{2} \\ \Leftrightarrow \sqrt{2a^2-8a+10}-\sqrt{2} &< \sqrt{2}|a+1| < \sqrt{2a^2-8a+10}+\sqrt{2} \\ \Leftrightarrow \sqrt{a^2-4a+5}-1 &< |a+1| < \sqrt{a^2-4a+5}+1 \quad \cdots \textcircled{4} \end{aligned}$$

となる。以下、 $a+1$ の符号に注目して場合分けをする。

[1] $a+1 \geq 0$ 、すなわち $a \geq -1$ のとき

$$\begin{aligned} \sqrt{a^2-4a+5}-1 &< a+1 < \sqrt{a^2-4a+5}+1 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{a^2-4a+5} &< a+2 \\ \sqrt{a^2-4a+5} &> a \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-4a+5 < (a+2)^2 \quad (\because a+2 > 0) \\ a^2-4a+5 > a^2 \quad (\because a > 0) \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a > \frac{1}{8} \\ a < \frac{5}{4} \end{cases} \end{aligned}$$

となる。したがって、 $a \geq -1$ における $\textcircled{4}$ の解は $\frac{1}{8} < a < \frac{5}{4}$ である。

[2] $a+1 < 0$ 、すなわち $a < -1$ のとき

$$\begin{aligned} \sqrt{a^2-4a+5}-1 &< -(a+1) < \sqrt{a^2-4a+5}+1 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{a^2-4a+5} &< -a \\ \sqrt{a^2-4a+5} &> -a-2 \end{cases} \end{aligned}$$

となる。ここで

$$\begin{aligned} \sqrt{a^2-4a+5} &< -a \\ \Leftrightarrow a^2-4a+5 &< a^2 \quad (\because -a > 0) \\ \Leftrightarrow a &> \frac{5}{4} \end{aligned}$$

となるが、 $a < -1$ を満たさないため、 $a < -1$ における $\textcircled{4}$ の解は存在しない。

以上より、[1], [2]より、 $\frac{1}{8} < a < \frac{5}{4}$ である。

(4)

$b=\frac{a+3}{2}$ のとき

$$\begin{aligned} C_1: x^2+y^2-2ax-2(a+3)y+14a-1 &= 0 \\ C_2: x^2+y^2+2x-4y+3 &= 0 \end{aligned}$$

であるから、2式の辺々の差をとった、

$$(a+1)x+(a+1)y-7a+2=0$$

は円 C_1 と C_2 の2つの交点を通る。すなわち、この方程式は直線 l を表す。円 C_1 の中心

$(a, a+3)$ と直線 l の距離が $\frac{5\sqrt{8}}{8}$ のとき、点と直線の距離の公式より、

$$\begin{aligned} \frac{|(a+1)a+(a+1)(a+3)-7a+2|}{\sqrt{(a+1)^2+(a+1)^2}} &= \frac{5\sqrt{8}}{8} \\ \Leftrightarrow \frac{|2a^2-2a+5|}{\sqrt{2}|a+1|} &= \frac{5\sqrt{8}}{8} \\ \Leftrightarrow 2|2a^2-2a+5| &= 5|a+1| \\ \therefore 2(2a^2-2a+5) &= \pm 5(a+1) \end{aligned}$$

である。ここで

$$\begin{aligned} 2(2a^2-2a+5) &= 5(a+1) \\ \Leftrightarrow 4a^2-9a+5 &= 0 \\ \Leftrightarrow (a-1)(4a-5) &= 0 \\ \Leftrightarrow a &= 1 \left(\because \frac{1}{8} < a < \frac{5}{4} \right) \end{aligned}$$

である。また、

$$\begin{aligned} 2(2a^2-2a+5) &= -5(a+1) \\ \Leftrightarrow 4a^2+a+15 &= 0 \end{aligned}$$

となるが、 $4a^2+a+15=4\left(a+\frac{1}{8}\right)^2+\frac{239}{16}>0$ より、 $4a^2+a+15=0$ を満たす実数解は存在しな

い。よって、 $2(2a^2-2a+5)=\pm 5(a+1)$ を満たす実数解は $a=1$ であり、このとき

$l: 2x+2y-5=0$ 、すなわち $l: y=-x+\frac{5}{2}$ となる。