

〔Ⅱ〕

〔解答〕

(1)	2
(2)	$\frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$
(3)	$3 - \sqrt{3}$
(4)	$a = 1, b = 6, c = -4$

(5)

$t > 0$ より, $t > 0, \frac{6}{t} > 0$ であるから, 相加平均・相乗平均の関係より, y は

$$\begin{aligned} y &= t + \frac{6}{t} - 4 \\ &\geq 2\sqrt{t \cdot \frac{6}{t}} - 4 \\ &= 2\sqrt{6} - 4 \end{aligned}$$

が成立する。ここで, 等号成立条件は

$$\begin{aligned} t &= \frac{6}{t} \text{ かつ } t > 0 \\ \Leftrightarrow t^2 &= 6 \text{ かつ } t > 0 \\ \therefore t &= \sqrt{6} \end{aligned}$$

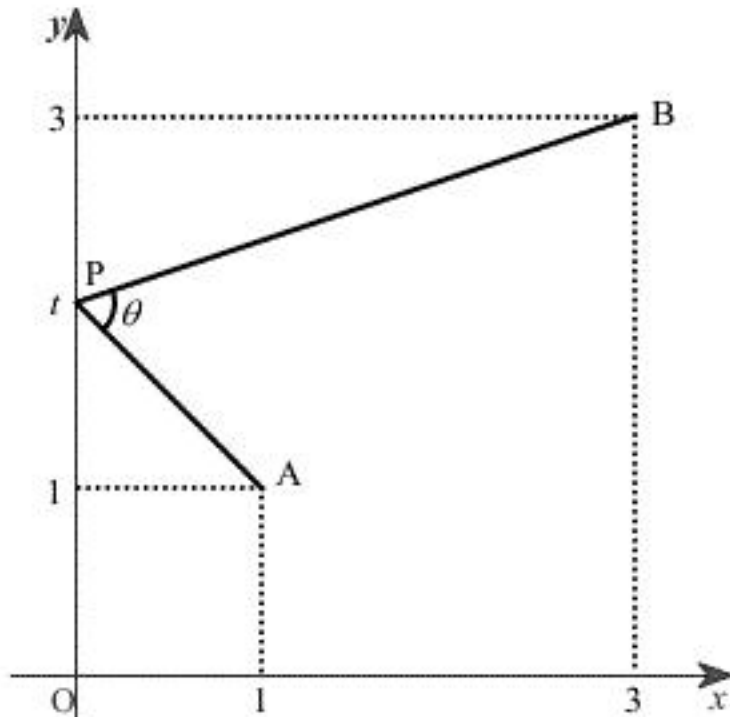
のときであるが, これは $1 \leq t \leq 3$ を満たす。したがって, y が最小となるときの t の値は, $t = \sqrt{6}$ である。

(答) $\sqrt{6}$

〔解説〕

(1)

問題文の状況を図示すると以下のようになる。



$t = 2$ のとき点 P の座標は $(0, 2)$ である。このとき $\overrightarrow{PA} = (1, -1)$, $\overrightarrow{PB} = (3, 1)$ であるから,

$$\cos \theta = \frac{\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}}{|\overrightarrow{PA}| |\overrightarrow{PB}|} = \frac{1 \cdot 3 + (-1) \cdot 1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

である。ここで, 点 A, B の x 座標はともに正より $0 < \theta < \pi$ であり, $\cos \theta > 0$ より $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ である。したがって, $\tan \theta > 0$ より

$$\tan \theta = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \theta} - 1} = \sqrt{5 - 1} = 2$$

である。

(答) 2

(2)

加法定理より, $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$ である。

(答) $\frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$

(3)

直線 PA, PB が x 軸となす角をそれぞれ α, β $\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, 0 < \beta < \frac{\pi}{2}\right)$ とすると,

$\tan \alpha = -\frac{1-t}{1} = t-1, \tan \beta = \frac{3-t}{3}$ である。 $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$ より(2)から,

$$\tan \frac{\pi}{4} = \frac{(t-1) + \left(\frac{3-t}{3}\right)}{1 - (t-1) \frac{3-t}{3}}$$

である。これを解くと

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{\frac{2}{3}t}{1 + \left(1 - \frac{4}{3}t + \frac{1}{3}t^2\right)} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{3}t^2 - \frac{4}{3}t + 2 &= \frac{2}{3}t \\ \Leftrightarrow t^2 - 6t + 6 &= 0 \\ \Leftrightarrow t &= 3 \pm \sqrt{3} \end{aligned}$$

となる。 $1 \leq t \leq 3$ より, t の値は $3 - \sqrt{3}$ である。

(答) $3 - \sqrt{3}$

(4)

(3)と同様にすると $\alpha + \beta = \theta$ であるから,

$$\tan \theta = \frac{(t-1) + \left(\frac{3-t}{3}\right)}{1 - (t-1) \frac{3-t}{3}}$$

となる。整理すると,

$$\begin{aligned} \tan \theta &= \frac{(t-1) + \left(\frac{3-t}{3}\right)}{1 - (t-1) \frac{3-t}{3}} \\ \Leftrightarrow \tan \theta &= \frac{2t}{t^2 - 4t + 6} \\ \Leftrightarrow \frac{\tan \theta}{2} &= \frac{t}{t^2 - 4t + 6} \\ \therefore \frac{2}{\tan \theta} &= \frac{t^2 - 4t + 6}{t} = t + \frac{6}{t} - 4 \end{aligned}$$

であるから, a, b, c は $a = 1, b = 6, c = -4$ である。

(答) $a = 1, b = 6, c = -4$