

# 〔 I 〕

〔解答〕

|   |
|---|
| I |
| G |

〔解説〕

真数条件より

$$\begin{cases} x > 0 \\ 8 - x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x < 8$$

である。

$$\begin{aligned} y &= \log_2 x + 2 \log_2 (8 - x) \\ &= \log_2 x(x - 8)^2 \end{aligned}$$

であり、底 2 は 1 より大きいから、 $x(x - 8)^2$  が最大となるとき  $y$  も最大となる。ここで

$f(x) = x(x - 8)^2$  ( $0 < x < 8$ ) とおくと、

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^3 - 16x^2 + 64x)' \\ &= 3x^2 - 32x + 64 \\ &= (3x - 8)(x - 8) \end{aligned}$$

となり、 $f(x)$  の増減表は以下のようになる。

|         |   |     |               |     |   |
|---------|---|-----|---------------|-----|---|
| $x$     | 0 | ... | $\frac{8}{3}$ | ... | 8 |
| $f'(x)$ |   | +   | 0             | -   |   |
| $f(x)$  |   | ↗   | 最大            | ↘   |   |

したがって、増減表より  $y$  が最大となるときの  $x$  の値は  $\frac{8}{3}$  である。

〔Ⅱ〕

〔解答〕

|     |               |
|-----|---------------|
| (1) | $\frac{2}{5}$ |
|     | G             |
| (2) | $\frac{3}{5}$ |
|     | F             |
| (3) | $\frac{4}{5}$ |
|     | H             |

〔解説〕

(1)

出荷された製品は全部で

$$100+200+200=500 \text{ (台)}$$

ある。このうち工場 A, B, C から出荷された製品が取り出され、それが不良品である確率はそれぞれ

$$\frac{100}{500} \cdot \frac{3}{100} = \frac{3}{500}$$

$$\frac{200}{500} \cdot \frac{2}{100} = \frac{4}{500}$$

$$\frac{200}{500} \cdot \frac{1}{100} = \frac{2}{500}$$

である。よって、求める確率は

$$\frac{3}{500} + \frac{4}{500} + \frac{2}{500} = \frac{9}{500}$$

である。

(2)

出荷されたすべての製品から無作為に1台取り出したとき、それが不良品である確率は  $\frac{9}{500}$

であり、出荷されたすべての製品から無作為に1台取り出したとき工場 C から出荷された製

品が取り出され、かつそれが不良品である確率は(1)より  $\frac{2}{500}$  であるから、求める確率は

$$\frac{\frac{2}{500}}{\frac{9}{500}} = \frac{2}{9}$$

となる。

(3)

(2)と同様に考えて、出荷されたすべての製品から無作為に1台取り出し不良品であったとき、それが工場 A から出荷されたものである確率は

$$\frac{\frac{3}{500}}{\frac{9}{500}} = \frac{3}{9}$$

であるから、求める確率は

$$\frac{2}{9} + \frac{3}{9} = \frac{5}{9}$$

となる。

# 〔Ⅲ〕

〔解答〕

|   |   |   |      |
|---|---|---|------|
| 5 | 6 | 7 | 101  |
| B | E | D | 1008 |

〔解説〕

自然数  $m, n$  の最大公約数を  $G(m, n)$ 、最小公倍数を  $L(m, n)$  と表すことにすると、

$$L(A, B) = 1260 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$L(B, C) = 1680 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$G(A, B) = 14 = 2 \cdot 7 \quad \dots \textcircled{3}$$

$$G(A, C) = 6 = 2 \cdot 3 \quad \dots \textcircled{4}$$

$$G(B, C) = 4 = 2^2 \quad \dots \textcircled{5}$$

である。①、②から負でない整数  $a_k, b_k, c_k$  ( $k=1, 2, 3, 4$ ) を用いて

$$A = 2^{a_1} \cdot 3^{a_2} \cdot 5^{a_3} \cdot 7^{a_4} \quad (0 \leq a_1, a_2 \leq 2, 0 \leq a_3, a_4 \leq 1)$$

$$B = 2^{b_1} \cdot 3^{b_2} \cdot 5^{b_3} \cdot 7^{b_4} \quad (0 \leq b_1 \leq 2, 0 \leq b_2, b_3, b_4 \leq 1)$$

$$C = 2^{c_1} \cdot 3^{c_2} \cdot 5^{c_3} \cdot 7^{c_4} \quad (0 \leq c_1 \leq 4, 0 \leq c_2, c_3, c_4 \leq 1)$$

と表せる。まず  $a_1, b_1, c_1$  について考える。⑤より  $c_1 \geq 2$  であるから④より  $a_1 = 1$  となる。よって、①より  $b_1 = 2$ 、②より  $c_1 = 4$  となる。次に、 $a_2, b_2, c_2$  について考える。④より  $a_2, c_2 \geq 1$  であるから、③、⑤より  $b_2 = 0$  となる。よって、①より  $a_2 = 2$ 、②より  $c_2 = 1$  となる。さらに、 $a_3, b_3, c_3$  について考える。 $a_3 = 1$  とすると、③、④より  $b_3 = c_3 = 0$  となるがこれは②に不適である。よって、 $a_3 = 0$  であり、①より  $b_3 = 1$ 、⑤より  $c_3 = 0$  となる。最後に、 $a_4, b_4, c_4$  について考える。②より  $a_4, b_4 \leq 1$ 、③より  $a_4, b_4 \geq 1$  であるから、 $a_4 = b_4 = 1$  となる。よって、④より  $c_4 = 0$  となる。以上より、

$$A = 2^1 \cdot 3^2 \cdot 5^0 \cdot 7^1 = 126$$

$$B = 2^2 \cdot 3^0 \cdot 5^1 \cdot 7^1 = 140$$

$$C = 2^4 \cdot 3^1 \cdot 5^0 \cdot 7^0 = 48$$

$$L(A, C) = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^0 \cdot 7^1 = 1008$$

である。

# [Ⅳ]

[解答]

|   |   |
|---|---|
| 8 | 9 |
| I | H |

[解説]

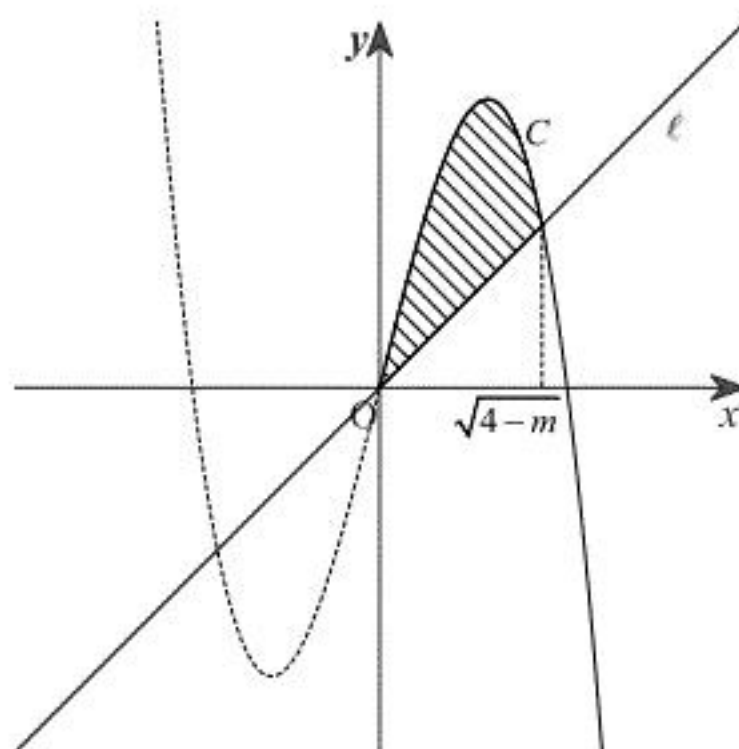
曲線  $y = -x^3 + 4x$  と  $\ell$  の交点の  $x$  座標は

$$-x^3 + 4x = mx$$

$$\Leftrightarrow x^3 + (m-4)x = 0$$

$$\Leftrightarrow x\{x^2 + (m-4)\} = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

の実数解である。  $m \geq 4$  のとき、 $\textcircled{1}$ の実数解は  $x=0$  のみとなり不適である。  $m < 4$  のとき、 $\textcircled{1}$ の実数解は  $x=0, \pm\sqrt{4-m}$  となるから、 $C$  の定義域は  $x \geq 0$  より  $C$  と  $\ell$  は  $x=0, \sqrt{4-m}$  において共有点をもつ。したがって、求める  $m$  の範囲は  $m < 4$  である。また、このとき  $C$  と  $\ell$  で囲まれた図形は下図の斜線部分である。



したがって、この面積は

$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{4-m}} (-x^3 + 4x - mx) dx &= \left[ -\frac{1}{4}x^4 + \frac{4-m}{2}x^2 \right]_0^{\sqrt{4-m}} \\ &= -\frac{(4-m)^2}{4} + \frac{(4-m)^2}{2} \\ &= \frac{(4-m)^2}{4} \end{aligned}$$

である。これが  $\frac{1}{4}$  となるのは

$$\begin{aligned} \frac{(4-m)^2}{4} &= \frac{1}{4} \\ \Leftrightarrow (4-m)^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow 4-m &= 1 \quad (\because 4-m > 0) \\ \therefore m &= 3 \end{aligned}$$

のときである。

# 〔V〕

## 〔解答〕

|     |                                                                 |
|-----|-----------------------------------------------------------------|
| (1) | <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">10</span>  |
|     | D                                                               |
| (2) | <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">102</span> |
|     | 1.963                                                           |

## 〔解説〕

(1)

1回の操作の後、容器Aに入っている食塩の重さは

$$80 \cdot \frac{10}{100} + 20 \cdot \frac{1}{100} = 8.2(\text{g})$$

である。このとき、容器Aに入っている食塩水の重さは100gであるから、食塩水の濃度は

$$\frac{8.2}{100} \cdot 100 = 8.2(\%)$$

である。

(2)

$n$ を0以上の整数とし、 $a_n$ (%)を $n+1$ 回目の操作を行う直前の容器Aの食塩水の濃度とする。このとき、 $n+1$ 回目の操作を終えた後の容器Aに含まれる食塩の重さに注目して

$$100 \cdot \frac{a_{n+1}}{100} = 80 \cdot \frac{a_n}{100} + 20 \cdot \frac{1}{100}$$

$$\Leftrightarrow a_{n+1} = \frac{4}{5}a_n + \frac{1}{5}$$

$$\Leftrightarrow a_{n+1} - 1 = \frac{4}{5}(a_n - 1)$$

$$\Leftrightarrow a_n - 1 = \left(\frac{4}{5}\right)^n (a_0 - 1)$$

$$\Leftrightarrow a_n = 9 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^n + 1$$

となる。ここで、容器Bが空になるのは10回目の操作を行った後であるから、求める濃度は

$$\begin{aligned} a_{10} &= 9 \cdot 0.8^{10} + 1 \\ &= 9 \cdot 0.107 + 1 \\ &= 1.963(\%) \end{aligned}$$

となる。

〔Ⅵ〕

〔解答〕

|     |                 |              |
|-----|-----------------|--------------|
| (1) | $\boxed{11}$    |              |
|     | C               |              |
| (2) | $\boxed{12}$    |              |
|     | J               |              |
| (3) | $\boxed{13}$    | $\boxed{14}$ |
|     | G               | I            |
| (4) | $\boxed{103}$   | $\boxed{15}$ |
|     | $\frac{45}{61}$ | F            |

〔解説〕

(1)

$$|\overline{BC}|=|\overline{AC}-\overline{AB}|=8 \text{ より}$$

$$\begin{aligned} |\overline{AC}-\overline{AB}|^2 &= 64 \\ \Leftrightarrow |\overline{AC}|^2-2\cdot\overline{AB}\cdot\overline{AC}+|\overline{AB}|^2 &= 64 \\ \Leftrightarrow 16-2\cdot\overline{AB}\cdot\overline{AC}+36 &= 64 \\ \therefore \overline{AB}\cdot\overline{AC} &= -6 \end{aligned}$$

となる。

(2)

$\triangle ABC$  の外接円の半径を  $R$  とおくと、 $AP=BP=R$  より

$$\begin{aligned} |\overline{AP}-\overline{AB}|^2 &= R^2 \\ \Leftrightarrow R^2-2\cdot\overline{AB}\cdot\overline{AP}+|\overline{AB}|^2 &= R^2 \\ \Leftrightarrow 2\cdot\overline{AB}\cdot\overline{AP}-36 &= 0 \\ \therefore \overline{AB}\cdot\overline{AP} &= 18 \end{aligned}$$

となる。

(3)

$CP=R$  より

$$\begin{aligned} |\overline{AP}-\overline{AC}|^2 &= R^2 \\ \Leftrightarrow 2\cdot\overline{AC}\cdot\overline{AP}-16 &= 0 \\ \Leftrightarrow \overline{AC}\cdot\overline{AP} &= 8 \end{aligned}$$

となる。 $\overline{AP}=s\overline{AB}+t\overline{AC}$  ( $s, t$  は実数)とおくと、

$$\begin{aligned} \begin{cases} \overline{AB}\cdot\overline{AP}=18 \\ \overline{AC}\cdot\overline{AP}=8 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} s|\overline{AB}|^2+t\overline{AB}\cdot\overline{AC}=18 \\ s\overline{AB}\cdot\overline{AC}+t|\overline{AC}|^2=8 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 36s-6t=18 \\ -6s+16t=8 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 6s-t=3 \\ -6s+16t=8 \end{cases} \\ \Leftrightarrow (s, t)=\left(\frac{28}{45}, \frac{11}{15}\right) \end{aligned}$$

となる。よって、

$$\overline{AP}=\frac{28}{45}\overline{AB}+\frac{11}{15}\overline{AC}$$

となる。

(4)

$Q$  は直線  $AP$  上の点であるから、実数  $k$  を用いて

$$\overline{AQ}=k\overline{AP}=\frac{28k}{45}\overline{AB}+\frac{11k}{15}\overline{AC}$$

と表せる。一方、 $Q$  は直線  $BC$  上の点でもあるから

$$\begin{aligned} \frac{28k}{45}+\frac{11k}{15} &= 1 \\ \Leftrightarrow \frac{61}{45}k &= 1 \\ \Leftrightarrow k &= \frac{45}{61} \end{aligned}$$

となる。よって、

$$\overline{AQ}=\frac{45}{61}\overline{AP}$$

である。また、 $\overline{AQ}=\frac{28}{61}\overline{AB}+\frac{33}{61}\overline{AC}$  より  $BQ:CQ=33:28$  であるから、

$$\overline{BQ}=\frac{33}{61}\overline{BC}$$

となる。

〔Ⅶ〕

〔解答〕

|    |    |
|----|----|
| 16 | 17 |
| J  | G  |

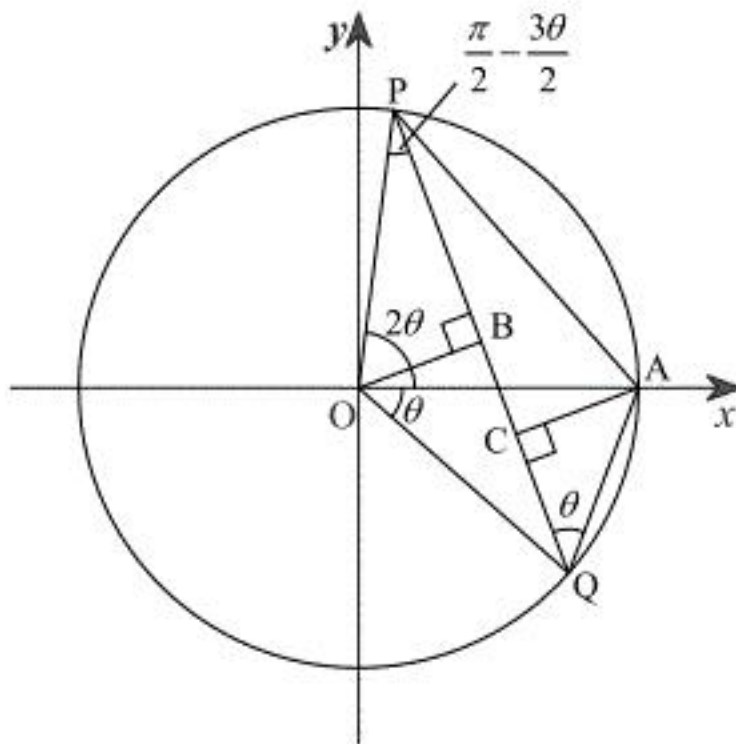
〔解説〕

$\angle QOA = \theta$  とするとき、 $\angle AOP = 2\theta$  であり、点 P は第 1 象限、点 Q は第 4 象限にあることから

$$0 < \theta < \frac{\pi}{2} \text{ かつ } 0 < 2\theta < \frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow 0 < \theta < \frac{\pi}{4}$$

である。また原点、点 A から直線 PQ に下ろした垂線の足をそれぞれ B, C とする。



円周角の定理より

$$\angle PQA = \frac{1}{2} \angle POA = \theta$$

であり、また  $\triangle OPQ$  は二等辺三角形より

$$\angle OQP = \frac{\pi - \angle QOP}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{3\theta}{2}$$

である。さらに、円周角の定理より

$$\angle APQ = \frac{1}{2} \angle QOA = \frac{\theta}{2}$$

であるから、 $\triangle APQ$  において正弦定理より

$$\frac{AQ}{\sin \angle APQ} = 2 \cdot 1$$

$$\therefore AQ = 2 \sin \frac{\theta}{2}$$

である。したがって  $\triangle OPQ = \triangle PAQ$  のとき、

$$OB = AC$$

$$\Leftrightarrow OQ \sin \left( \frac{\pi}{2} - \frac{3\theta}{2} \right) = AQ \sin \theta$$

$$\Leftrightarrow \cos \frac{3\theta}{2} = 2 \sin \frac{\theta}{2} \sin \theta$$

$$\Leftrightarrow 4 \cos^3 \frac{\theta}{2} - 3 \cos \frac{\theta}{2} = 4 \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}$$

となる。 $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$  であるから、両辺を  $\cos \frac{\theta}{2} (\neq 0)$  で割ると、

$$4 \cos^2 \frac{\theta}{2} - 3 = 4 \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

$$\Leftrightarrow 4 \left( \cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) = 3$$

$$\Leftrightarrow \cos \theta = \frac{3}{4}$$

となる。よって、 $\cos \angle QOA = \frac{3}{4}$  である。また、このときの四角形 OPAQ の面積は、

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \left( \frac{3}{4} \right)^2} = \frac{\sqrt{7}}{4} \text{ を用いると、}$$

$$\begin{aligned} 2\triangle OPQ &= 1 \cdot 1 \cdot \sin 3\theta \\ &= -4 \sin^3 \theta + 3 \sin \theta \\ &= -4 \left( \frac{\sqrt{7}}{4} \right)^3 + 3 \cdot \frac{\sqrt{7}}{4} \\ &= -\frac{7\sqrt{7}}{16} + \frac{3\sqrt{7}}{4} \\ &= \frac{5\sqrt{7}}{16} \end{aligned}$$

となる。