

【 I 】

【解答】

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
S	R	F	I	Q	O

【解説】

1.

点 O, A, B, C は同一平面上にあり, $\vec{u}$ と $\vec{v}$ は一次独立であるから, 実数 s, t を用いて

$$\vec{w} = s\vec{u} + t\vec{v}$$

と表せる。 $\vec{v} \perp \vec{w}$ より

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$$

$$\Leftrightarrow s\vec{u} \cdot \vec{v} + t|\vec{v}|^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 15s + 25t = 0$$

$$\therefore t = -\frac{3}{5}s$$

となる。したがって

$$\vec{w} = s\vec{u} - \frac{3}{5}s\vec{v}$$

を得る。 $|\vec{w}| = 5$ より

$$|\vec{w}|^2 = 5^2$$

$$\Leftrightarrow \left| s\vec{u} - \frac{3}{5}s\vec{v} \right|^2 = 25$$

$$\Leftrightarrow s^2 \left(25 - \frac{6}{5} \cdot 15 + \frac{9}{25} \cdot 25 \right) = 25$$

$$\Leftrightarrow 16s^2 = 25$$

$$\therefore s = \pm \frac{5}{4}$$

となる。ここで, $\vec{u} \cdot \vec{w} > 0$ より

$$\vec{u} \cdot \vec{w} > 0$$

$$\Leftrightarrow s|\vec{u}|^2 - \frac{3}{5}s\vec{u} \cdot \vec{v} > 0$$

$$\Leftrightarrow s \left(25 - \frac{3}{5} \cdot 15 \right) > 0$$

$$\Leftrightarrow 16s > 0$$

$$\therefore s > 0$$

を得る。以上より, $s = \frac{5}{4}$ となり,

$$\begin{aligned} \vec{w} &= \frac{5}{4}\vec{u} - \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{4}\vec{v} \\ &= \frac{5}{4}\vec{u} - \frac{3}{4}\vec{v} \end{aligned}$$

となる。

2.

総試合数が3の場合, A グループは全員試合を1試合ずつ行い, B グループは試合を1人が1試合, もう1人が2試合行う。よって, 求める組合せは, B グループの1試合のみ行う人を選択する組合せとその人がA グループの誰と試合を行うかの組合せの積である。したがって, 求める組合せは

$$2 \cdot 3 = 6 \text{ (通り)}$$

となる。総試合数が4の場合, A グループは試合を2人が1試合ずつ行い, もう1人が2試合行い, 2試合行う人は, B グループの2人と試合を行う。よって, 求める組合せは, A グループの誰が2試合行うかを選択する組合せとA グループで1試合行う2人がB グループの誰を選択するかの組合せの積である。したがって, 求める組合せは

$$3 \cdot 2^2 = 12 \text{ (通り)}$$

である。

3.

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ のとき, $\sin \theta > 0$ であるので,

$$\sin \theta + \cos 2\theta = \sin 3\theta$$

$$\Leftrightarrow \sin \theta + 1 - 2\sin^2 \theta = 3\sin \theta - 4\sin^3 \theta$$

$$\Leftrightarrow 4\sin^3 \theta - 2\sin^2 \theta - 2\sin \theta + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2\sin \theta - 1)(2\sin^2 \theta - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin \theta = \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (\because \sin \theta > 0)$$

$$\therefore \theta = \frac{1}{6}\pi, \frac{1}{4}\pi \quad \left(\because 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \right)$$

である。

【Ⅱ】

【解答】

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ
1	3	1	2	3	1	2	5	3
コ	サ	シ	ス	セ	ソ	タ	チ	
1	1	1	2	3	2	9	2	

【解説】

$$x^3 - 2x + 1 = x + a$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 3x + 1 = a$$

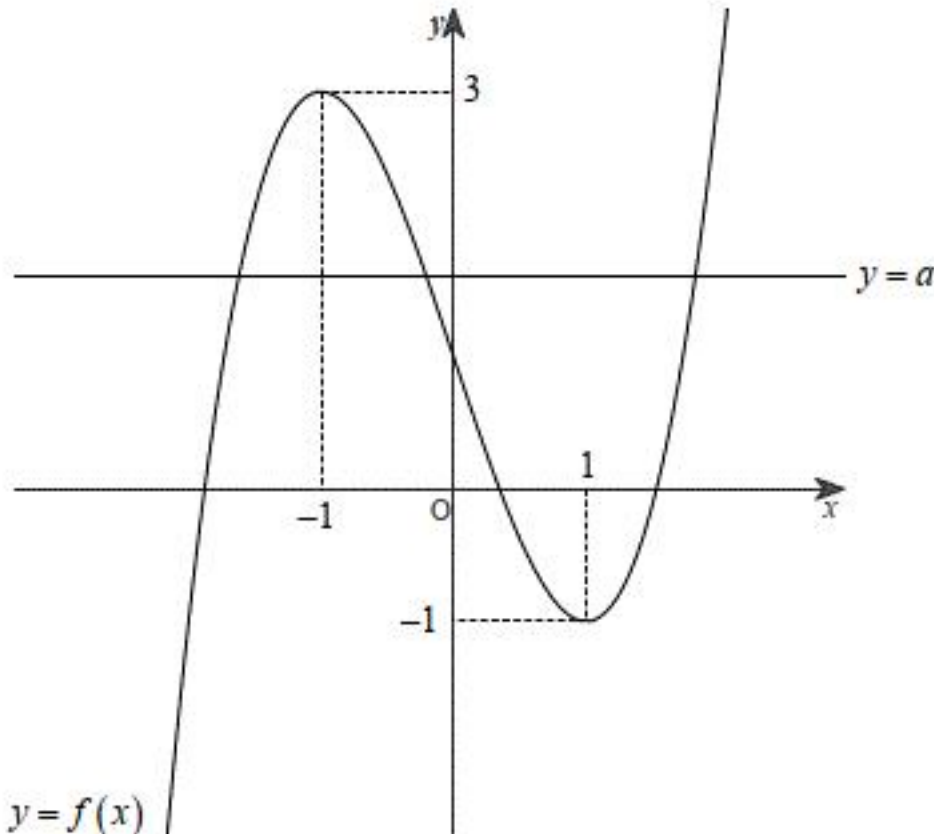
となるから、 $f(x) = x^3 - 3x + 1$ とおくと、 C と ℓ が2つの共有点を持つことと、 $y = f(x)$ のグラフが $y = a$ と2つの共有点を持つことは同値である。ここで、

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 3 \\ &= 3(x^2 - 1) \\ &= 3(x+1)(x-1) \end{aligned}$$

であるから、 $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1, 1$ である。したがって、 $f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	...	-1	...	1	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	3	↘	-1	↗

この増減表をもとに $y = f(x)$ と $y = a$ のグラフを示すと次図のようになる。



上図より、 $y = f(x)$ が $y = a$ と2つの共有点を持つならば、 $a = -1$ または $a = 3$ である。

$a = -1$ のとき、

$$\begin{aligned} f(x) &= -1 \\ \Leftrightarrow x^3 - 3x + 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-1)^2(x+2) &= 0 \\ \therefore x &= -2, 1 \end{aligned}$$

となる。よって、 ℓ は $x = 1$ で C に接し、もう1つの共有点は、 $(-2, -3)$ である。 $a = 3$ のとき、

$$\begin{aligned} f(x) &= 3 \\ \Leftrightarrow x^3 - 3x - 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x+1)^2(x-2) &= 0 \\ \therefore x &= -1, 2 \end{aligned}$$

となる。よって、 ℓ は $x = -1$ で C に接し、もう1つの共有点は、 $(2, 5)$ である。 ℓ が $x = b$ で C と共有点を持つとき、

$$\begin{aligned} b^3 - 2b + 1 &= b + a \\ \therefore a &= b^3 - 3b + 1 \end{aligned}$$

である。このとき、

$$\begin{aligned} x^3 - 2x + 1 &= x + a \\ \Leftrightarrow x^3 - 3x + 1 - (b^3 - 3b + 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow x^3 - b^3 - 3(x - b) &= 0 \\ \Leftrightarrow (x - b)(x^2 + bx + b^2) - 3(x - b) &= 0 \\ \Leftrightarrow (x - b)(x^2 + bx + b^2 - 3) &= 0 \end{aligned}$$

である。 ℓ が C と3つの共有点を持つには、 $x^2 + bx + b^2 - 3 = 0$ が $x = b$ 以外で2つの解を持つことが必要十分である。ここで、 $x^2 + bx + b^2 - 3 = 0$ が $x = b$ で解を持つのは、

$$\begin{aligned} 3b^2 - 3 &= 0 \\ \therefore b &= -1, 1 \end{aligned}$$

である。また、 $x^2 + bx + b^2 - 3 = 0$ の判別式を D とすると、 $x^2 + bx + b^2 - 3 = 0$ が相異なる2つの解を持つのは $D > 0$ のときであるから、

$$\begin{aligned} D &> 0 \\ \Leftrightarrow b^2 - 4(b^2 - 3) &> 0 \\ \Leftrightarrow -3b^2 + 12 &> 0 \\ \Leftrightarrow b^2 - 4 &< 0 \\ \therefore -2 < b < 2 \end{aligned}$$

である。以上より、 $-2 < b < 2$ かつ $b = -1, 1$ 以外の場合に、 ℓ は C と3つの共有点を持ち、

$$\begin{aligned} (x - b)(x^2 + bx + b^2 - 3) &= 0 \\ \Leftrightarrow x = b, \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4(b^2 - 3)}}{2} \\ \therefore x = b, \frac{-b \pm \sqrt{12 - 3b^2}}{2} \end{aligned}$$

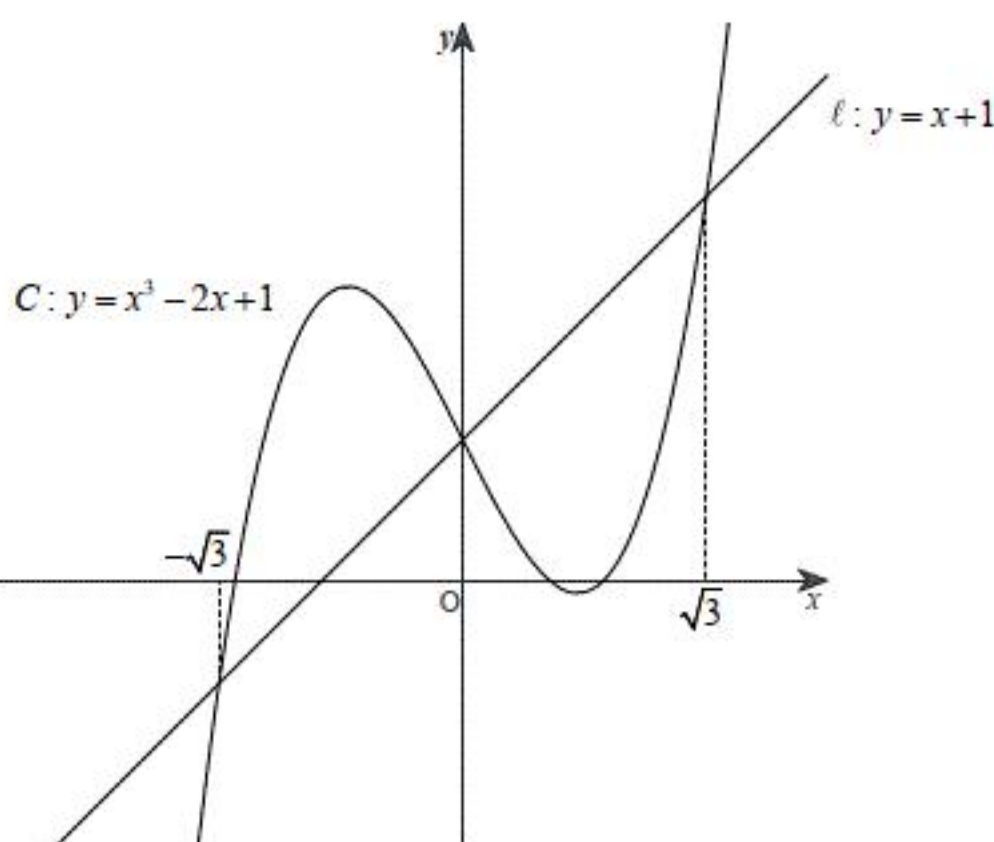
で C と交わる。このときさらに、 $b = \sqrt{3}$ とすると、 ℓ と C の交点は、

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{3}, \frac{-\sqrt{3} \pm \sqrt{12 - 3 \cdot 3}}{2} \\ \Leftrightarrow x &= \sqrt{3}, \frac{-\sqrt{3} \pm \sqrt{3}}{2} \\ \Leftrightarrow x &= \sqrt{3}, 0, -\sqrt{3} \end{aligned}$$

となる。また、

$$\begin{aligned} a &= 3\sqrt{3} - 3\sqrt{3} + 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

である。このとき、 C と ℓ をそれぞれ図示すると次図のようになる。



上図より、 ℓ と C で囲まれた図形の面積は、

$$\begin{aligned} &\int_{-\sqrt{3}}^0 \{(x^3 - 2x + 1) - (x + 1)\} dx + \int_0^{\sqrt{3}} \{(x + 1) - (x^3 - 2x + 1)\} dx \\ &= \int_{-\sqrt{3}}^0 (x^3 - 3x) dx + \int_0^{\sqrt{3}} (-x^3 + 3x) dx \\ &= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{3}{2}x^2 \right]_{-\sqrt{3}}^0 + \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{3}{2}x^2 \right]_0^{\sqrt{3}} \\ &= -\left(\frac{9}{4} - \frac{9}{2} \right) + \left(-\frac{9}{4} + \frac{9}{2} \right) \\ &= \frac{9}{2} \end{aligned}$$

である。

【Ⅲ】

1.

(1)

直線 $x+y=5$ 上の整数点は、

$$(0, 5), (1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1), (5, 0)$$

であり、このうち条件 (P) を満たすのは、

$$(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)$$

である。したがって、 $a_5=4$ を得る。直線 $x+y=6$ 上の整数点は、

$$(0, 6), (1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1), (6, 0)$$

であり、このうち条件 (P) を満たすのは、

$$(1, 5), (5, 1)$$

である。したがって、 $a_6=2$ を得る。

(答) $a_5=4, a_6=2$

(2)

[1] $a=0$ または $b=0$ のとき

条件 (P) を満たすような a, b の値は

$$(a, b) = (0, 0), (0, 1), (1, 0)$$

である。

[2] $a \geq 1$ かつ $b \geq 1$ のとき

A が条件 (P) を満たすための必要十分条件が「 a, b が互いに素」であることを示す。A と原点を結ぶ線分は、

$$ay = bx \quad (0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b) \cdots \textcircled{1}$$

と表せる。まず、 a, b が互いに素でないとき、A が条件 (P) を満たさないことを示す。

a, b が互いに素でないとき、 a, b の最大公約数 $d (\neq 1)$ を用いて

$$a = dm$$

$$b = dn$$

と表せる。ただし、 $d \geq 2$ より m, n は、 $1 \leq m < a, 1 \leq n < b$ を満たす整数である。このとき、

①より

$$ay = bx$$

$$\Leftrightarrow dmy = dnx$$

$$\therefore my = nx$$

となり、 $(x, y) = (m, n)$ のとき、等式を満たす。よって、 a, b が互いに素でないならば、A は条件 (P) を満たさない。この対偶も真であるため、A が条件 (P) を満たすならば a, b は互いに素である。また、 a, b が互いに素であるとき、①より、 y は b の倍数であり、 x は a の倍数であることが分かる。 $0 \leq x \leq a$ を満たす a の倍数は $0, a$ のみであり、 $0 \leq y \leq b$ を満たす b の倍数は $0, b$ のみであるから、A は条件 (P) を満たす。したがって、 $a \geq 1$ かつ $b \geq 1$ のとき A が条件 (P) を満たすための必要十分条件は「 a, b が互いに素」である。

以上、[1], [2] より、A が条件 (P) を満たすための必要十分条件は「 $(a, b) = (0, 0), (0, 1), (1, 0)$ または a, b が互いに素」である。

(答) $(a, b) = (0, 0), (0, 1), (1, 0)$ または a, b が互いに素

2.

$pq+1$ は、 $x+y=pq$ 上の整数点の個数である。よって、与式の左辺は $x+y=pq$ 上の整数点の個数を意味する。ここで、 $pq > 0$ より、 $(x, y) \neq (0, 0)$ であることを踏まえて、 $x+y=pq$ 上の任意の整数点 (x, y) に対し、 x と y の最大公約数を d とおく。このとき、互いに素な整数 x_0, y_0 を用いて $x = dx_0, y = dy_0$ とおけ、 $d(x_0 + y_0) = pq$ である。これより d は pq の約数である。 p, q はともに素数であるから、 $d = 1, p, q, pq$ のいずれかである。 d の値によって以下のように場合分けする。

[1] $d=1$ のとき

x と y は互いに素であるから、1.(2)より、点 (x, y) は条件 (P) を満たす。したがって、 $x+y=pq$ かつ $d=1$ を満たす整数点の個数は a_{pq} である。

[2] $d=p$ のとき

x_0 と y_0 は互いに素かつ $x_0 + y_0 = q$ であるから、点 (x_0, y_0) は条件 (P) を満たす。したがって、 $x+y=pq$ かつ $d=p$ を満たす整数点の個数は a_q である。

[3] $d=q$ のとき

x_0 と y_0 は互いに素かつ $x_0 + y_0 = p$ であるから、点 (x_0, y_0) は条件 (P) を満たす。したがって、 $x+y=pq$ かつ $d=q$ を満たす整数点の個数は a_p である。

[4] $d=pq$ のとき

x_0 と y_0 は互いに素かつ $x_0 + y_0 = 1$ であるから、点 (x_0, y_0) は条件 (P) を満たす。したがって、 $x+y=pq$ かつ $d=pq$ を満たす整数点の個数は a_1 である。

以上、[1], [2], [3], [4] は排反な事象であるから、 $x+y=pq$ 上の整数点の個数に関して

$$pq+1 = a_{pq} + a_p + a_q + a_1$$

という等式を得る。

(証明終)

$x+y=p$ 上の任意の整数点 (x, y) に対し、 x と y の最大公約数を d' とおくと、 d' は素数 p の約数であるから、 $1, p$ のいずれかである。上述の証明と同様にすると、 $d'=1$ となるような整数点の個数は a_p であり、 $d'=p$ となるような整数点の個数は a_1 である。したがって、

$x+y=p$ 上の整数点の個数に関して

$$p+1 = a_p + a_1$$

が成り立つ。ここで、直線 $x+y=1$ 上の条件 (P) を満たす整数点は $(0, 1), (1, 0)$ の2つであるから、 $a_1=2$ である。以上より

$$a_p = p-1$$

を得る。同様にして $a_q = q-1$ であるから、これと与式より、

$$\begin{aligned} a_{pq} &= (pq+1) - (a_p + a_q + a_1) \\ &= (pq+1) - (p-1) - (q-1) - 2 \\ &= pq+1 - p - q \end{aligned}$$

となる。

(答) $a_{pq} = pq+1 - p - q$