

〔 I 〕

〔解答〕

(1)	ア	イ	ウ
	2	1	2
(2)	エ		
	4		

〔解説〕

(1)

与えられた式を変形すると,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\cos x)(1 + \cos x)}{1 + \sin x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1 + \sin x} dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{1 + \sin x} dx$$

である。右辺の第1項について $\sin x = t$ とおくと、積分区間は下表のようになる。

x	0	→	$\frac{\pi}{2}$
t	0	→	1

また, $\frac{dt}{dx} = \cos x$ であるから,

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1 + \sin x} dx &= \int_0^1 \frac{1}{1+t} dt \\ &= [\log(t+1)]_0^1 \\ &= \log 2 \end{aligned}$$

のように計算できる。次に右辺の第2項は,

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{1 + \sin x} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin^2 x}{1 + \sin x} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin x) dx \\ &= [x + \cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\pi}{2} - 1 \end{aligned}$$

となる。したがって,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\cos x)(1 + \cos x)}{1 + \sin x} dx = \frac{\pi}{2} - 1 + \log 2$$

である。

(2)

与えられた式は,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2^4 + 3^4 + \cdots + n^4}{n^5} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n k^4}{n^5} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n} \right)^4 \end{aligned}$$

のように式変形できる。区分求積法を用いると、求める値は

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n} \right)^4 &= \int_0^1 x^4 dx \\ &= \left[\frac{1}{5} x^5 \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{5} \end{aligned}$$

となる。

〔Ⅱ〕

〔解答〕

(1)	カ	キ		
	3	2		
(2)	ク	ケ	コ	
	0	0	7	

〔解説〕

(1)

$\log(2e^{3x}) = 3x + \log 2$ であるから,

$$\begin{aligned} f(x) &= \log(2e^{3x} + 4) - ax - b - \log(2e^{3x}) + \log(2e^{3x}) \\ &= \log \frac{2e^{3x} + 4}{2e^{3x}} - ax - b + (3x + \log 2) \\ &= \log \left(1 + \frac{2}{e^{3x}} \right) + (-a + 3)x + (-b + \log 2) \end{aligned}$$

となる。ここで、 $\lim_{x \rightarrow \infty} \log \left(1 + \frac{2}{e^{3x}} \right) = \log 1 = 0$ であるから,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \{(-a + 3)x + (-b + \log 2)\} = 0$$

である。したがって,

$$\begin{aligned} -a + 3 &= 0 \\ \therefore a &= 3 \end{aligned}$$

が必要であり、 $a = 3$ のとき、 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -b + \log 2$ となり、極限值をもち十分である。このとき,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \{(-a + 3)x + (-b + \log 2)\} &= 0 \\ \Leftrightarrow -b + \log 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow b &= \log 2 \end{aligned}$$

である。以上のことから、求める値は $a = 3, b = \log 2$ である。

(2)

$OA = 1, AB = \sqrt{2}, OB = \sqrt{3}$ より、 $OA^2 + AB^2 = OB^2$ が成り立つから、三平方の定理の逆より

$\triangle OAB$ は $\angle OAB = \frac{\pi}{2}$ の直角三角形である。よって、 $\angle AOB = \theta$ とおくと、

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{OA}{OB} = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \sin \theta &= \frac{AB}{OB} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

となる。このことと、

$$\begin{aligned} \left| \frac{\beta}{\alpha} \right| &= \left| \frac{OB}{OA} \right| = \sqrt{3} \\ \arg \frac{\beta}{\alpha} &= \pm \theta \end{aligned}$$

より,

$$\begin{aligned} z &= \frac{\beta}{\alpha} \\ &= \sqrt{3} \{ \cos(\pm \theta) + i \sin(\pm \theta) \} \\ &= \sqrt{3} (\cos \theta \pm i \sin \theta) \\ &= 1 \pm \sqrt{2}i \end{aligned}$$

となる。 z の虚部は正より、 $z = 1 + \sqrt{2}i$ である。また、 $z - 1 = \sqrt{2}i$ の両辺を 2 乗すると、 z は

$$\begin{aligned} (z - 1)^2 &= (\sqrt{2}i)^2 \\ \Leftrightarrow z^2 - 2z + 1 &= -2 \\ \therefore z^2 - 2z + 3 &= 0 \end{aligned}$$

を満たす。よって,

$$\begin{aligned} z^3 - 2z^2 + 4z + 1 &= z(z^2 - 2z + 3) + z + 1 \\ &= z + 1 \\ &= 2 + \sqrt{2}i \end{aligned}$$

である。

〔Ⅲ〕

〔解答〕

(1)	あ	
	2	
(2)	い	う
	0	13
(3)	え	
	5	
(4)	お	
	9	
(5)	か	
	1	

〔解説〕

(1)

X, Y は独立である。条件㊸, すなわち「2以上の自然数 n を用いて $X = nY$ と表せる」を満たす X は, $Y = 2$ より $X = 4, 6$ のみである。したがって, 条件を満たす (X, Y) の組は2通りある。

(2)

W の定義及び $1 \leq X, 1 \leq Y$ より, $W \geq 0$ である。 $(X, Y) = (2, 3)$ のとき条件㊸を満たし, $W = 0$ となるから, 求める最小値は0である。ここで, 条件㊸, すなわち $X = Y$ が成り立つとき, $W = X + Y = 2X$ である。よって, 条件㊸, ㊹, ㊺のいずれかを満たすとき, $X \leq 6$ より $W < 13$ である。また, $Y \leq 13$ より条件㊸を満たすとき $W \leq 13$ である。したがって, 常に $W \leq 13$ であり, $(X, Y) = (1, 13)$ のとき条件㊸を満たし, $W = 13$ となるから, 求める最大値は13である。

(3)

条件㊸が成り立つとき $W = 0$ となるから, その他の場合について考える。

[1] 条件㊸が成り立つとき

$X = 4$ が必要であり, このとき条件を満たす (X, Y) の組は

$$(X, Y) = (4, 1), (4, 2)$$

の2通りある。

[2] 条件㊸が成り立つとき

$Y = 4$ が必要であり, このとき条件を満たす (X, Y) の組は

$$(X, Y) = (1, 4), (2, 4)$$

の2通りある。

[3] 条件㊸が成り立つとき

(2)より $W = 2X, X = Y$ であるから, 条件を満たす (X, Y) の組は

$$(X, Y) = (2, 2)$$

の1通りある。

以上, [1], [2], [3]より, $W = 4$ となる (X, Y) の組は全部で $2 + 2 + 1 = 5$ (通り) がある。

(4)

条件㊸が成り立つとき $W = 0$ となるから, その他の場合について考える。

[1] 条件㊸が成り立つとき

X が奇数となることが必要であり, $1 \leq X \leq 6$ より $X = 1, 3, 5$ の場合が考えられる。このとき条件を満たす (X, Y) の組は

$$(X, Y) = (3, 1), (5, 1)$$

の2通りある。

[2] 条件㊸が成り立つとき

Y が奇数となることが必要であり, $1 \leq Y \leq 13$ より $Y = 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13$ の場合が考えられる。このとき条件を満たす (X, Y) の組は

$$(X, Y) = (1, 3), (1, 5), (1, 7), (1, 9), (3, 9), (1, 11), (1, 13)$$

の7通りある。

[3] 条件㊸が成り立つとき

(2)より $W = 2X$ であるから, W は偶数となる。したがって, 条件を満たす (X, Y) の組は存在しない。

以上, [1], [2], [3]より, W が奇数となる (X, Y) の組は全部で $2 + 7 = 9$ (通り) がある。

(5)

X, Y, Z はそれぞれ独立である。 $Z'' = -1$ となることは, $Z = -1$ かつ W が奇数となることと同値である。したがって, これを満たす (X, Y, Z) の組の総数は(4)より9通りある。一方で, $Z'' = 1$ となるのは, 全体から $Z'' = -1$ となる場合を除いた場合である。全体の (X, Y, Z) の組の総数は $6 \cdot 13 \cdot 2 = 156$ (通り) があるから, $Z'' = 1$ となる組の総数は $156 - 9 = 147$ (通り) がある。以上のことから, $Z'' = 1$ となる (X, Y, Z) の組の方が多い。

〔Ⅳ〕

(1)

四面体 OABC の 4 枚の面は互いに合同な三角形であるから、 $\triangle OAB$ と $\triangle OBC$ は合同である。

ここで、 $OA = |\vec{a}|$, $OB = |\vec{b}|$, $OC = |\vec{c}|$ より、 $\triangle OAB$ は長さが $|\vec{a}|, |\vec{b}|$ の辺をもち、 $\triangle OBC$ は長さが $|\vec{b}|, |\vec{c}|$ の辺をもつ。これらのことと、 $|\vec{a}|, |\vec{b}|, |\vec{c}|$ がすべて異なることから、 $\triangle OAB$ は長さが $|\vec{a}|, |\vec{b}|, |\vec{c}|$ の辺をもち、 $AB = |\vec{c}|$ である。同様にして、 $BC = |\vec{a}|$, $CA = |\vec{b}|$ となるから、

$$\begin{cases} |\vec{a} - \vec{b}| = |\vec{c}| \\ |\vec{b} - \vec{c}| = |\vec{a}| \\ |\vec{c} - \vec{a}| = |\vec{b}| \end{cases}$$

が成り立つ。それぞれの式について、両辺を 2 乗して展開すると、

$$\begin{cases} |\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = |\vec{c}|^2 \\ |\vec{b}|^2 - 2\vec{b} \cdot \vec{c} + |\vec{c}|^2 = |\vec{a}|^2 \\ |\vec{c}|^2 - 2\vec{c} \cdot \vec{a} + |\vec{a}|^2 = |\vec{b}|^2 \end{cases}$$

となるから、辺々を足し合わせると、

$$\begin{aligned} 2|\vec{a}|^2 + 2|\vec{b}|^2 + 2|\vec{c}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} - 2\vec{b} \cdot \vec{c} - 2\vec{c} \cdot \vec{a} &= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 \\ \Leftrightarrow |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} - 2\vec{b} \cdot \vec{c} - 2\vec{c} \cdot \vec{a} &= 0 \end{aligned}$$

である。

(証明終)

(2)

(1)を用いて、

$$\begin{aligned} |\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}|^2 &= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} - 2\vec{b} \cdot \vec{c} - 2\vec{c} \cdot \vec{a} \\ &= \left(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} - 2\vec{b} \cdot \vec{c} - 2\vec{c} \cdot \vec{a} \right) + 4\vec{a} \cdot \vec{b} \\ &= 4\vec{a} \cdot \vec{b} \end{aligned}$$

となるので、 $k=4$ である。

(答) $k=4$

(3)

4 点 O, A, B, C は同一平面上にないので、 $\vec{a} + \vec{b} - \vec{c} \neq \vec{0}$ である。よって、 $|\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}| > 0$ から(2)より

$$\begin{aligned} 4\vec{a} \cdot \vec{b} &> 0 \\ \therefore \vec{a} \cdot \vec{b} &> 0 \end{aligned}$$

である。ここで、 $\angle AOB = \theta$ ($0 < \theta < \pi$) とすると、

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$$

となるから、

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &> 0 \\ \Leftrightarrow \cos \theta &> 0 \left(\because |\vec{a}| > 0, |\vec{b}| > 0 \right) \\ \therefore 0 &< \theta < \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

である。したがって、 $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角は鋭角である。

(証明終)

(4)

$\overrightarrow{OD} = \vec{d}$, $\overrightarrow{OE} = \vec{e}$, $\overrightarrow{OF} = \vec{f}$ とすると、

$$\begin{cases} \vec{a} = \vec{d} + \vec{e} \\ \vec{b} = \vec{e} + \vec{f} \\ \vec{c} = \vec{f} + \vec{d} \end{cases}$$

となる。(1)より $|\vec{a} - \vec{b}|^2 = |\vec{c}|^2$ が成り立つから、上の式を代入すると、

$$\begin{aligned} |(\vec{d} + \vec{e}) - (\vec{e} + \vec{f})|^2 &= |\vec{f} + \vec{d}|^2 \\ \Leftrightarrow |\vec{d} - \vec{f}|^2 &= |\vec{f} + \vec{d}|^2 \\ \Leftrightarrow |\vec{f}|^2 - 2\vec{f} \cdot \vec{d} + |\vec{d}|^2 &= |\vec{f}|^2 + 2\vec{f} \cdot \vec{d} + |\vec{d}|^2 \\ \therefore \vec{f} \cdot \vec{d} &= 0 \end{aligned}$$

となる。同様にして、 $\vec{d} \cdot \vec{e} = 0$, $\vec{e} \cdot \vec{f} = 0$ となる。したがって、辺 OD, OE, OF は互いに直交する。ここで、1つの角が直角である平行四辺形は長方形であるから、四角形

ODAE, OEBC, OFCD は長方形である。また、平行六面体の向かい合う面は合同であるから、四角形 FCGB, DAGC, EBGA も長方形である。したがって、平行六面体 ODAE-FCGB は全ての面が長方形であるから、直方体である。

(証明終)

〔V〕

(1)

曲線 C について、 $\frac{dy}{dx}=x$ であるから法線 ℓ の方程式は

$$y = -\frac{1}{t}(x-t) + \frac{1}{2}t^2 \quad (\because t \neq 0)$$

$$\therefore y = -\frac{1}{t}x + \frac{1}{2}t^2 + 1$$

である。

(答) $y = -\frac{1}{t}x + \frac{1}{2}t^2 + 1$

(2)

法線 ℓ と曲線 C の共有点の座標は

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x^2 \\ y = -\frac{1}{t}x + \frac{1}{2}t^2 + 1 \end{cases}$$

の解である。よって、共有点の x 座標は

$$\frac{1}{2}x^2 = -\frac{1}{t}x + \frac{1}{2}t^2 + 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 + \frac{2}{t}x - t^2 - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-t) \left\{ x + \left(t + \frac{2}{t} \right) \right\} = 0$$

$$\therefore x = t, -t - \frac{2}{t}$$

となる。したがって、

$$s = -t - \frac{2}{t} \quad (\because s \neq t)$$

である。

(答) $s = -t - \frac{2}{t}$

(3)

曲線 C について $\frac{dy}{dx}=x$ であるから、

$$g(x) = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2}$$

$$= \sqrt{1 + x^2}$$

である。

(答) $g(x) = \sqrt{1 + x^2}$

(4)

$f'(t)$ を計算すると、

$$f'(t) = g(t) - g(s) \frac{ds}{dt}$$

$$= \sqrt{1+t^2} - \sqrt{1 + \left(-t - \frac{2}{t} \right)^2} \left(-1 + \frac{2}{t^2} \right)$$

$$= \sqrt{1+t^2} - \sqrt{5+t^2 + \frac{4}{t^2}} \left(-1 + \frac{2}{t^2} \right)$$

$$= \sqrt{1+t^2} - \frac{\sqrt{(1+t^2)(4+t^2)}}{t} \cdot \frac{2-t^2}{t^2}$$

$$= \frac{\sqrt{1+t^2}}{t^3} \left\{ t^3 - (2-t^2)\sqrt{4+t^2} \right\}$$

である。以下、 t^2 と 2 の大小で場合分けして $f'(t)$ の正負を調べる。

- [1] $t^2 \geq 2$ のとき、すなわち $t \geq \sqrt{2}$ のとき
 $2-t^2 \leq 0$ となるから、この場合 $f'(t) > 0$ である。
- [2] $t^2 < 2$ のとき、すなわち $0 < t < \sqrt{2}$ のとき

$$t^3 > (2-t^2)\sqrt{4+t^2}$$

に対して、 $2-t^2 > 0$ より両辺が正であるから、2 乗して

$$t^6 > (2-t^2)^2(4+t^2)$$

$$\Leftrightarrow t^6 > t^6 - 12t^2 + 16$$

$$\Leftrightarrow t^2 > \frac{4}{3}$$

$$\therefore \frac{2\sqrt{3}}{3} < t < \sqrt{2} \quad \left(\because \frac{4}{3} < 2 \right)$$

となる。よって、

$$0 < t < \frac{2\sqrt{3}}{3} \text{ のとき、 } f'(t) < 0$$

$$t = \frac{2\sqrt{3}}{3} \text{ のとき、 } f'(t) = 0$$

$$\frac{2\sqrt{3}}{3} < t < \sqrt{2} \text{ のとき、 } f'(t) > 0$$

となる。

以上[1],[2]より、 $f(t)$ の増減表は下表のようになる。

t	(0)	...	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	...
$f'(t)$		-	0	+
$f(t)$		$\searrow$	最小	$\nearrow$

したがって、 $f(t)$ が最小となる t の値は $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ である。

(答) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$