

2023 年度 明治大学

【全学部統一】

解答時間 60分

配点 100点

ひ

国語、数学Ⅲ 問題

はじめに、これを読みなさい。

1. 解答を始めるよう合図があるまで、問題冊子は開かないこと。
2. この問題冊子には、「数学Ⅲ」と「国語」の問題がおさめられている。「数学Ⅲ」は表面から8ページ、「国語」は裏面から21ページである。必要な科目を選択して解答すること。なお、表紙の次の白紙2ページはメモ用紙として使用してもよい。
3. 解答用紙に印刷されている座席番号が正しいかどうか、受験票と照合して確認すること。
4. 監督者の指示にしたがい、解答用紙の氏名欄に氏名を記入すること。
5. 解答用紙の「**解答科目マーク欄**」にマークし、「**解答科目名記入欄**」に**解答する科目名を記入**すること。マークされていない場合、または複数の科目にマークされている場合は、この時限の科目は採点対象外となる。
6. 解答は、すべて解答用紙の所定欄にマークすること。
7. 1つの解答欄に2つ以上マークしないこと。
8. 解答は、必ず鉛筆またはシャープペンシル(いずれもHB・黒)で記入すること。
9. 訂正する場合は、消しゴムできれいに消し、消しくずを残さないこと。
10. 解答用紙は、絶対に汚したり折り曲げたりしないこと。
11. **解答用紙はすべて回収するので、持ち帰らず、必ず提出すること。**
12. 問題冊子は、必ず持ち帰ること。
13. 試験時間は、60分である。
14. (数学Ⅲ) 分数形で解答する場合は、既約分数で答えること。
15. (数学Ⅲ) 根号を含む形で解答する場合は、根号の中に現れる自然数が最小となる形で答えること。
16. マーク記入例

良い例	悪い例
	

数学Ⅲ 問題

〔Ⅰ〕 次の空欄 に当てはまるものを指定された解答群の中から選び、解答用紙の所定の欄の番号をマークせよ。それ以外の空欄には、当てはまる 0 から 9 までの数字を解答用紙の所定の欄にマークせよ。以下、 $\log$ は自然対数とする。

(1) 無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \log \frac{(n+1)(n+2)}{n(n+3)}$ の和は である。

(2) 複素数 z の方程式 $z^2 - 3|z| + 2 = 0$ を考える。この方程式は 個の解をもち、このうち実数でない解の個数は 個である。

アの解答群

- | | | | | | |
|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| ① 0 | ② $\log 2$ | ③ $\log 3$ | ④ $\log 5$ | ⑤ $2\log 2$ | ⑥ $2\log 3$ |
| ⑦ $2\log 5$ | ⑧ $3\log 2$ | ⑨ $3\log 3$ | ⑩ $3\log 5$ | | |

(このページは計算用紙として使用してよい。)

〔Ⅱ〕 次の空欄 、、、、、 に当てはまるものをそれぞれ指定された解答群の中から選び、解答用紙の所定の欄の番号をマークせよ。なお、解答群から同じものを2回以上選んでもよい。

$t > 0$ に対して、次の2つの定積分を考える。

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-tx} \sin x \, dx, \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-tx} \cos x \, dx$$

部分積分を用いれば、

$$I = \text{} - tJ, \quad J = \text{} + tI$$

が成り立つことがわかるので、

$$I = \frac{\text{}}{\text{}}, \quad J = \frac{\text{}}{\text{}}$$

を得る。したがって、 $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log(\text{})}{t} = 0$ を用いれば、

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-tx} \cos x \, dx - \frac{t}{\text{}} \right) = \text{}$$

となる。

ア、イ、エの解答群

- ① -1 ② 1 ③ $-\pi$ ④ π ⑤ $1-t$ ⑥ $1+t$
 ⑦ $1-t^2$ ⑧ $1+t^2$ ⑨ $-e^{-\frac{\pi}{2}t}$ ⑩ $e^{-\frac{\pi}{2}t}$

ウ、オの解答群

- ① t ② 1 ③ $-1 - te^{-\frac{\pi}{2}t}$ ④ $-1 + te^{-\frac{\pi}{2}t}$ ⑤ $1 - te^{-\frac{\pi}{2}t}$
 ⑥ $1 + te^{-\frac{\pi}{2}t}$ ⑦ $-t - e^{-\frac{\pi}{2}t}$ ⑧ $-t + e^{-\frac{\pi}{2}t}$ ⑨ $t - e^{-\frac{\pi}{2}t}$ ⑩ $t + e^{-\frac{\pi}{2}t}$

カの解答群

- ① 0 ② $-\frac{\pi}{2}$ ③ $-\frac{\pi}{3}$ ④ $-\frac{\pi}{4}$ ⑤ $-\frac{\pi}{6}$ ⑥ $\frac{\pi}{12}$ ⑦ $\frac{\pi}{4}$ ⑧ $\frac{\pi}{3}$ ⑨ $\frac{\pi}{2}$ ⑩ $\frac{\pi}{6}$

(このページは計算用紙として使用してよい。)

〔Ⅲ〕 次の空欄に当てはまる 0 から 9 までの数字を解答用紙の所定の欄にマークせよ。ただし、空欄 サシ は 2 桁の数を表す。

座標平面上の双曲線 $x^2 - 4y^2 = 5$ を C とおき、点 $(1, 0)$ を通り傾き m が正となる直線を l とおく。

C の漸近線は $y = \frac{\text{ア}}{\text{イ}}x$ と $y = -\frac{\text{ア}}{\text{イ}}x$ である。また、 l と C の共有点がただ 1 つとなるの

は、 m が $\frac{\sqrt{\text{ウ}}}{\text{エ}}$ または $\frac{\text{オ}}{\text{カ}}$ のときである。 $m = \frac{\sqrt{\text{ウ}}}{\text{エ}}$ ならば l は C の接線となる。

ここで $a = \frac{\text{オ}}{\text{カ}}$ とおく。 $m < a$ であるときに、 l と C の共有点の y 座標のうち最大のものを y_m と

すれば、

$$y_m = \frac{m}{\text{キ} - \text{ク}m^2} \left(-\text{ケ} + \sqrt{\text{コ} - \text{サシ}m^2} \right)$$

となる。このとき、

$$\lim_{m \rightarrow a-0} y_m = \text{ス}$$

が成り立つ。

(このページは計算用紙として使用してよい。)

〔Ⅳ〕 次の空欄 ア、イ、カ、キ に当てはまるものをそれぞれ指定された解答群の中から選び、解答用紙の所定の欄の番号をマークせよ。なお、解答群から同じものを2回以上選んでもよい。それ以外の空欄には、当てはまる0から9までの数字を解答用紙の所定の欄にマークせよ。

座標平面において、2点 $(-2, 0)$, $(2, 0)$ からの距離の積が4であるような点 P の軌跡を考える。点 P の座標を (x, y) とすると、 x, y は次の方程式をみたす。

$$y^4 + \boxed{\text{ア}} y^2 + \left(\boxed{\text{イ}} \right)^2 = 16 \quad \cdots \cdots (1)$$

方程式 (1) が表す曲線を C とおき、 C の概形を描くことにしよう。まず、曲線 C と x 軸との共有点の x 座標は ウ と $\pm \boxed{\text{エ}} \sqrt{\boxed{\text{オ}}}$ である。次に、(1) を y^2 に関する2次方程式とみて解けば、 $y^2 \geq 0$ であるので、

$$y^2 = \boxed{\text{カ}} + 4\sqrt{\boxed{\text{キ}}} \quad \cdots \cdots (2)$$

となり、また x のとりうる値の範囲は

$$-\boxed{\text{ク}} \sqrt{\boxed{\text{ケ}}} \leq x \leq \boxed{\text{ク}} \sqrt{\boxed{\text{ケ}}}$$

となる。 $x \geq 0, y \geq 0$ とすれば、方程式 (2) は $0 \leq x \leq \boxed{\text{ク}} \sqrt{\boxed{\text{ケ}}}$ を定義域とする x の関数 y を定める。このとき、 $0 < x < \boxed{\text{ク}} \sqrt{\boxed{\text{ケ}}}$ において、 $y' = 0$ となるのは $x = \sqrt{\boxed{\text{コ}}}$ のときである。したがって、 $x \geq 0, y \geq 0$ の範囲で C の概形を描くことができ、 C が x 軸および y 軸に関して対称であることから、 C 全体の概形がわかる。

以上の議論から、 $a \geq 0$ としたとき、直線 $y = a$ と曲線 C の共有点の個数を求めることができる。 $a > \boxed{\text{サ}}$ のとき共有点はなく、 $0 \leq a \leq \boxed{\text{サ}}$ のとき共有点がある。共有点の個数は、 $a = 0$ のとき シ 個、 $0 < a < \boxed{\text{サ}}$ のとき ス 個、 $a = \boxed{\text{サ}}$ のとき セ 個となる。

ア、イ、カ、キの解答群

- | | | | | |
|----------------|----------------|----------------|----------------|-----------------|
| ① $x^2 + 1$ | ① $-(x^2 + 1)$ | ② $x^2 - 1$ | ③ $-(x^2 - 1)$ | ④ $x^2 + 4$ |
| ⑤ $2(x^2 + 4)$ | ⑥ $x^2 - 4$ | ⑦ $2(x^2 - 4)$ | ⑧ $-(x^2 + 4)$ | ⑨ $-2(x^2 - 4)$ |

(このページは計算用紙として使用してよい。)

