

2023 年度 明治大学

【総合数理学部】

解答時間 120分

配点 200点

な

数 学 問 題

注意事項

1. 解答を始めるよう合図があるまで、問題冊子は開かないこと。
2. この問題冊子は 14 ページあります。解答用紙には、「数学①」と「数学②」の 2 枚あり、「数学②」には表と裏があります。
3. あなたの座席番号は、2 枚の解答用紙に印刷されています。印刷されている座席番号と、受験票の番号が一致していることを確認しなさい。
4. 監督者の指示にしたがい、2 枚の解答用紙の所定の欄に氏名を記入しなさい。
5. 問題〔Ⅰ〕、〔Ⅱ〕の解答は、解答用紙「数学①」の所定の欄にマークしなさい。
6. 問題〔Ⅲ〕の解答は、解答用紙「数学①」の所定の欄に記入しなさい。
7. 問題〔Ⅳ〕、〔Ⅴ〕は、解答用紙「数学②」の所定の欄に解答しなさい。
8. 1 問につき 2 つ以上マークしないこと。2 つ以上マークした場合には、その解答は無効になります。
9. 解答は、必ず鉛筆又はシャープペンシル(いずれも HB・黒)で記入しなさい。
10. 訂正する場合は、消しゴムできれいに消し、消しくずを残さないこと。
11. 解答用紙は、絶対に汚したり折り曲げたりしないこと。また、所定の欄以外には絶対に記入しないこと。
12. 解答用紙は持ち帰らず、必ず提出しなさい。
13. この問題冊子は必ず持ち帰りなさい。
14. 試験時間は 120 分です。
15. マークシート記入例

良い例	悪い例
	

〔 I 〕 次の空欄 から に当てはまる 0 から 9 までの数字を，解答用紙の所定の欄にマークせよ。また，空欄 に当てはまるものを指定された解答群の中から選び，解答用紙の所定の欄にマークせよ。

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\cos x)(1 + \cos x)}{1 + \sin x} dx = \frac{\pi}{\text{ア}} - \text{イ} + \log \text{ウ}$ である。

ただし $\log$ は自然対数である。

(このページは計算用紙として使用してよい)

(2)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2^4 + 3^4 + \cdots + n^4}{n^5} = \boxed{\text{I}}$$

工の解答群

① 1

① $\frac{1}{2}$

② $\frac{1}{3}$

③ $\frac{1}{4}$

④ $\frac{1}{5}$

⑤ $\frac{2}{5}$

⑥ $\frac{1}{6}$

⑦ $\frac{1}{7}$

⑧ $\frac{2}{7}$

⑨ $\frac{3}{7}$

(このページは計算用紙として使用してよい)

〔Ⅱ〕 次の空欄 と に当てはまる 0 から 9 までの数字を，解答用紙の所定の欄にマークせよ。また，空欄 から に当てはまるものを指定された解答群の中から選び，解答用紙の所定の欄にマークせよ。

(1) 実数 a, b に対して関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \log(2e^{3x} + 4) - ax - b$$

とする。ただし， $\log$ は自然対数， e は自然対数の底である。 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ となるとき， $a = \text{カ}$ ，また $b = \log \text{キ}$ である。

(このページは計算用紙として使用してよい)

- (2) 複素数平面上の 3 点を $O(0)$, $A(\alpha)$, $B(\beta)$ とし, $z = \frac{\beta}{\alpha}$ とおく。△OAB において $OA = 1$, $AB = \sqrt{2}$, $OB = \sqrt{3}$ かつ z の虚部は正とする。このとき $z = \boxed{\text{ク}}$ である。この z は $\boxed{\text{ケ}}$ を満たす。また $z^3 - 2z^2 + 4z + 1$ の値は $\boxed{\text{コ}}$ である。なお、以下の解答群における i は虚数単位とする。

クの解答群

- ① $1 + \sqrt{2}i$ ② $1 + \sqrt{3}i$ ③ $1 + \sqrt{6}i$ ④ $\sqrt{2} + i$
 ⑤ $\sqrt{3} + i$ ⑥ $\sqrt{6} + i$ ⑦ $\sqrt{2} + \sqrt{3}i$ ⑧ $\sqrt{3} + \sqrt{2}i$
 ⑨ $\sqrt{6} + 2i$ ⑩ $2 + \sqrt{6}i$

ケの解答群

- ① $z^2 - 2z + 3 = 0$ ② $z^2 - 2z + 4 = 0$ ③ $z^2 - 2z + 7 = 0$
 ④ $z^2 - 4z + 10 = 0$ ⑤ $z^2 - 2\sqrt{2}z + 3 = 0$ ⑥ $z^2 - 2\sqrt{2}z + 5 = 0$
 ⑦ $z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$ ⑧ $z^2 - 2\sqrt{3}z + 5 = 0$ ⑨ $z^2 - 2\sqrt{6}z + 7 = 0$
 ⑩ $z^2 - 2\sqrt{6}z + 10 = 0$

コの解答群

- ① 0 ② 1 ③ $1 + \sqrt{2}i$ ④ $\sqrt{2} + i$
 ⑤ $\sqrt{2} + \sqrt{3}i$ ⑥ $\sqrt{3} + i$ ⑦ $\sqrt{3} + \sqrt{2}i$ ⑧ $2 + \sqrt{2}i$
 ⑨ $\sqrt{6} + i$ ⑩ $\sqrt{6} + 2i$

(このページは計算用紙として使用してよい)

〔Ⅲ〕 次の空欄 から に当てはまるもの (数・式など) を解答用紙の
所定の欄に記入せよ。

さいころ 1 個, 1 から 13 までの番号を 1 つずつ書いた 13 枚のカード, 硬貨 1 枚
がある。

さいころを投げて出た目を X , カードを 1 枚引いて出た番号を Y , 硬貨を投げて
表が出たら $Z = 1$, 裏が出たら $Z = -1$ とする。

X と Y について以下の 4 つの条件のうちただ 1 つが成り立つ。

- ㉑ X が Y の倍数であり, Y が X の倍数でない。
- ㉒ X が Y の倍数ではなく, Y が X の倍数である。
- ㉓ X が Y の倍数であり, Y が X の倍数である。
- ㉔ X が Y の倍数ではなく, Y が X の倍数でない。

いま, W を以下のように定義する。

$$W = \begin{cases} X & (\text{条件 ㉑ が成り立つとき}) \\ Y & (\text{条件 ㉒ が成り立つとき}) \\ X + Y & (\text{条件 ㉓ が成り立つとき}) \\ 0 & (\text{条件 ㉔ が成り立つとき}) \end{cases}$$

- (1) 条件 ㉑ を満たす (X, Y) の組のうちで, $Y = 2$ となるものは全部で
通りある。
- (2) W の最小値は , 最大値は である。
- (3) $W = 4$ となる (X, Y) の組は全部で 通りある。
- (4) W が奇数になる (X, Y) の組は全部で 通りある。ただし, 2 の倍
数である整数を偶数, 2 の倍数でない整数を奇数という。
- (5) $Z^W = 1$ となる (X, Y, Z) の組の総数と $Z^W = -1$ になる (X, Y, Z) の組の
総数を比べると, $Z^W =$ となる (X, Y, Z) の組の方が多い。

(このページは計算用紙として使用してよい)

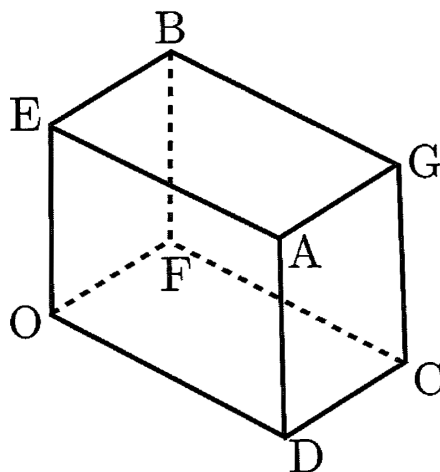
〔Ⅳ〕 四面体 $OABC$ の 4 枚の面は互いに合同な三角形でできているとする。 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とおく。ただし, $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$, $|\vec{c}|$ はすべて異なるとする。このとき以下の問いに答えよ。

(1) $|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} - 2\vec{b} \cdot \vec{c} - 2\vec{c} \cdot \vec{a} = 0$ を示せ。

(2) $|\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}|^2 = k\vec{a} \cdot \vec{b}$ を満たす実数 k の値を求めよ。

(3) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角は鋭角であることを示せ。

(4) 4 点 O, A, B, C を頂点に含む平行六面体 $ODAE - FCGB$ があるとする。このとき平行六面体 $ODAE - FCGB$ は直方体であることを示せ。ただし, 平行六面体では, すべての面は平行四辺形であり, 向かい合う面は合同である。



(このページは計算用紙として使用してよい)

〔V〕 点 $P\left(t, \frac{1}{2}t^2\right)$ ($t > 0$) を曲線 $C: y = \frac{1}{2}x^2$ の上の点とする。点 P における曲線 C の法線を ℓ とし、 ℓ と曲線 C の共有点のうち、 P と異なるものを $Q\left(s, \frac{1}{2}s^2\right)$ とする。

- (1) 法線 ℓ の方程式を求めよ。
- (2) 点 Q の x 座標 s を t で表せ。
- (3) 曲線 C における点 P から点 Q までの部分の長さを $f(t)$ とおくと、 $f(t)$ はある関数 $g(x)$ により

$$f(t) = \int_s^t g(x) dx$$

と表せる。この関数 $g(x)$ を求めよ。途中経過を記述する必要はない。

- (4) $f(t)$ が最小となる t の値を求めよ。ただし $f'(t) = g(t) - g(s)\frac{ds}{dt}$ であることは用いてよい。

(このページは計算用紙として使用してよい)

