

【I】

【解答】

(1)	ア	イ	ウ	エ	オ	カ					
	0	7	3	3	2	1					
(2)	キ	ク	ケ	コ	サ	シ	ス	セ	ソ		
	2	9	2	5	9	1	9	1	2		
(3)	タ	チ	ツ	テ							
	3	2	5	2							
(4)	ト	ナ	ニ	ヌ	ネ	ノ	ハ	ヒ	フ	ヘ	ホ
	2	5	4	2	4	0	1	8	0	6	0

【解説】

- (1)

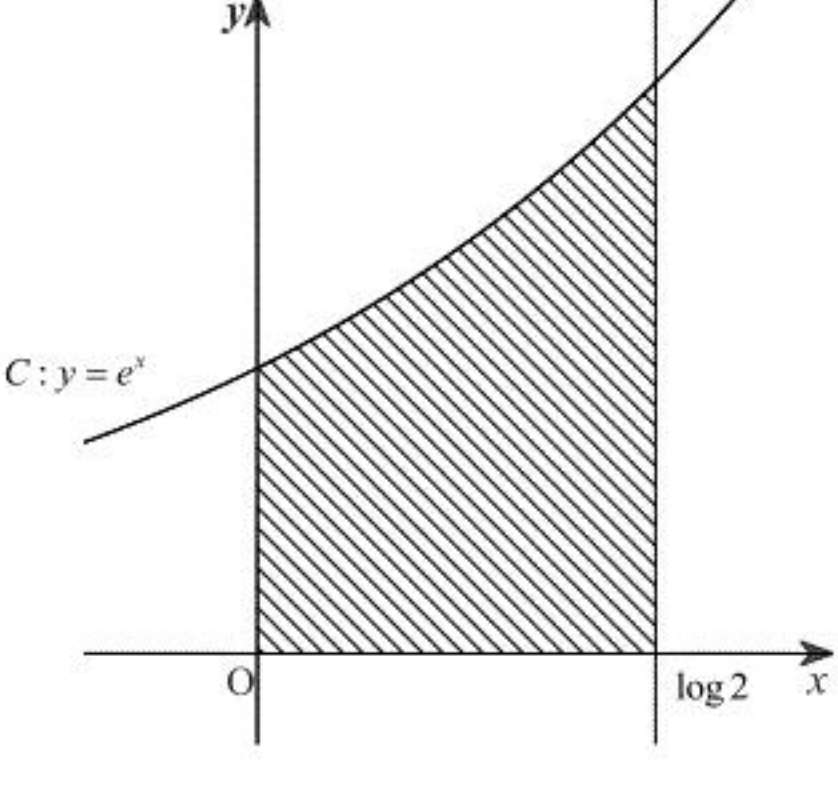
方程式 $f(x)=0$ は $\frac{1}{2}$ を解にもつから、因数定理より

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=0$$
$$\Leftrightarrow 4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3+k\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2-l\cdot\frac{1}{2}+m=0$$
$$\Leftrightarrow k=-2(2m-l+1) \qquad \cdots \cdots \textcircled{1}$$
が成り立つ。また、 $f'(x)=12x^2+2kx-l$ であり、 $f'(x)$ を $x+2$ で割ったときの余りは 41 であるから、剰余の定理より
$$f'(-2)=41$$
$$\Leftrightarrow 12\cdot(-2)^2+2k\cdot(-2)-l=41$$
$$\Leftrightarrow 4k+l=7$$
が成り立つ。ここで、 k, l はいずれも 0 以上の整数より、これを満たす (k, l) の組は $(k, l)=(0, 7), (1, 3)$ である。①より k は偶数であるから $(k, l)=(0, 7)$ であり、このとき
$$0=-2(2m-7+1)$$
$$\Leftrightarrow m=3$$
となり条件を満たす。したがって、 $k=0, l=7, m=3$ であり、
$$f(x)=4x^3-7x+3$$
$$=(2x-1)(2x^2+x-3)$$
$$=(2x-1)(2x+3)(x-1)$$
より、方程式 $f(x)=0$ の $\frac{1}{2}$ 以外の解は $-\frac{3}{2}$ と 1 である。
- (2)

2つのベクトル $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ が垂直であるとき、

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$$
$$\Leftrightarrow (k, 2, 1)\cdot(-k, 1, 2)=0$$
$$\Leftrightarrow -k^2+4=0$$
$$\therefore k=2 \ (\because k>0)$$
である。よって、
$$|\overrightarrow{OA}|=\sqrt{2^2+2^2+1^2}=3$$
$$|\overrightarrow{OB}|=\sqrt{(-2)^2+1^2+2^2}=3$$
より、 $\triangle OAB$ の面積を S とすると
$$S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|=\frac{9}{2}$$
である。また、点 H は平面 α 上にあるから、実数 s, t を用いて
$$\overrightarrow{OH}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$$
$$=(2s-2t, 2s+t, s+2t)$$
と表せる。よって、
$$\overrightarrow{CH}=(2s-2t-1, 2s+t-1, s+2t-1)$$
である。ここで、 $\overrightarrow{CH}$ と平面 α は垂直であるから $\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{OA}=0, \overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{OB}=0$ が成り立つ。以上より、
$$\begin{cases} \overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{OA}=0 \\ \overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{OB}=0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2(2s-2t-1)+2(2s+t-1)+(s+2t-1)=0 \\ -2(2s-2t-1)+(2s+t-1)+2(s+2t-1)=0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow (s, t)=\left(\frac{5}{9}, \frac{1}{9}\right)$$
であるから、 $\overrightarrow{OH}=\frac{5}{9}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{9}\overrightarrow{OB}$ である。したがって、
$$|\overrightarrow{CH}|=\sqrt{\left(-\frac{1}{9}\right)^2+\left(\frac{2}{9}\right)^2+\left(-\frac{2}{9}\right)^2}=\frac{1}{3}$$
より、求める四面体 $OABC$ の体積は
$$\frac{1}{3}\cdot S\cdot|\overrightarrow{CH}|=\frac{1}{3}\cdot\frac{9}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{2}$$
である。
- (3)(a)

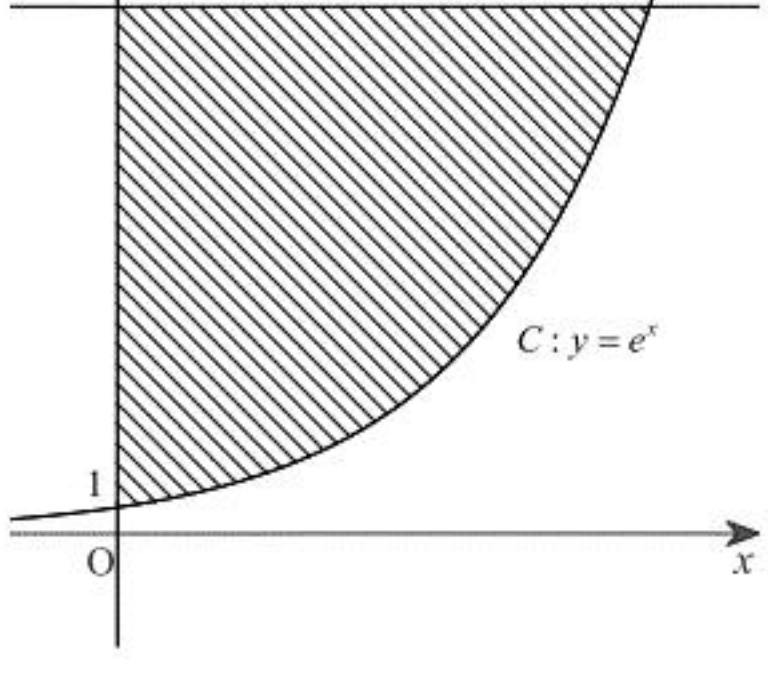
曲線 C と x 軸および 2 直線 $x=0, x=\log 2$ で囲まれた部分を図示すると下図の斜線部分のようになる。



したがって、求める体積は、

$$\pi\int_0^{\log 2}\left(e^x\right)^2dx=\pi\left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^{\log 2}$$
$$=\frac{3}{2}\pi$$
である。
- (b)

曲線 C と y 軸および直線 $y=e^3$ で囲まれた部分を図示すると下図の斜線部分のようになる。



曲線 C の方程式を x について解くと

$$y=e^x\Leftrightarrow x=\log y$$
となる。したがって、求める体積は、部分積分法より
$$\pi\int_1^{e^3}(\log y)^2dy=\pi\left[y(\log y)^2\right]_1^{e^3}-\pi\int_1^{e^3}2\log ydy$$
$$=\pi\left[y(\log y)^2-2y\log y\right]_1^{e^3}+2\pi\int_1^{e^3}dy$$
$$=\pi\left[y(\log y)^2-2y\log y+2y\right]_1^{e^3}$$
$$=(5e^3-2)\pi$$
である。
- (4)(a)

8人の生徒それぞれについて、2つの部屋 X, Y への入り方は 2 通りずつ存在する。よって、8人の部屋の入り方は全部で 2^8 通りあり、このうち 1 人も入らないような部屋が存在するのは 8 人全員がいずれか一方の部屋のみに入る 2 通りである。したがって、求める場合の数は

$$2^8-2=254(\text{通り})$$
である。
- (b)

(a)と同様に考えると、どちらの部屋にも 5 人の中学生のうち 1 人以上が入るような入り方は 2^5-2 通りあり、また、3 人の高校生の部屋の入り方は 2^3 通りある。したがって、求める場合の数は

$$(2^5-2)\cdot 2^3=240(\text{通り})$$
である。
- (c)

(a)と同様に考えると、どちらの部屋にも 5 人の中学生のうち 1 人以上が入るような入り方は 2^5-2 通りあり、また、どちらの部屋にも 3 人の高校生のうち 1 人以上が入るような入り方は 2^3-2 通りある。したがって、求める場合の数は

$$(2^5-2)\cdot (2^3-2)=180(\text{通り})$$
である。
- (d)

どちらの部屋も中学生の人数が高校生の人数より多くなるのは、一方の部屋に中学生が 2 人、高校生が 1 人入り、かつもう一方の部屋に中学生が 3 人、高校生が 2 人入るときのみである。したがって、求める場合の数は

$$2\cdot {}_5C_2\cdot {}_3C_1=60(\text{通り})$$
である。

〔Ⅱ〕

〔解答〕

あ	$3x - \sqrt{3}$				
い	$-12t^2 + 4\sqrt{3}t + 3$				
う	$\frac{\pi}{3}$	え	$\frac{\pi}{2}$	お	$\frac{2}{3}\pi$
か	$\frac{\sqrt{3}}{2}$		き	$-\sqrt{3}$	
く	$\frac{\sqrt{3}}{6}\pi - \frac{5}{6}$				

〔解説〕

(1) $f'(x) = 3\cos 3x + 2\sqrt{3}\sin 2x$ より、求める接線の方程式は
 $y = f'(0)x + f(0)$
 $\Leftrightarrow y = 3x - \sqrt{3}$
 である。

(2) 2倍角の公式と3倍角の公式より

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3\cos 3x + 2\sqrt{3}\sin 2x \\ &= 3(4\cos^3 x - 3\cos x) + 4\sqrt{3}\sin x \cos x \\ &= \{12(1 - \sin^2 x) - 9 + 4\sqrt{3}\sin x\}\cos x \\ &= (-12\sin^2 x + 4\sqrt{3}\sin x + 3)\cos x \end{aligned}$$

と変形できる。したがって、
 $g(t) = -12t^2 + 4\sqrt{3}t + 3$
 である。

(3) (2)の結果より $g(t) = -12\left(t + \frac{\sqrt{3}}{6}\right)\left(t - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ であるから、

$$f'(x) = -12\left(\sin x + \frac{\sqrt{3}}{6}\right)\left(\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cos x$$

 となる。ここで、 $x > 0$ の範囲で

$$\begin{aligned} \sin x - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0 &\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3}, \frac{2}{3}\pi, \frac{7}{3}\pi, \dots \\ \cos x = 0 &\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi, \dots \end{aligned}$$

より $\left(\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cos x = 0$ となる x の値を小さい順に並べると
 $x = \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2}{3}\pi, \dots$

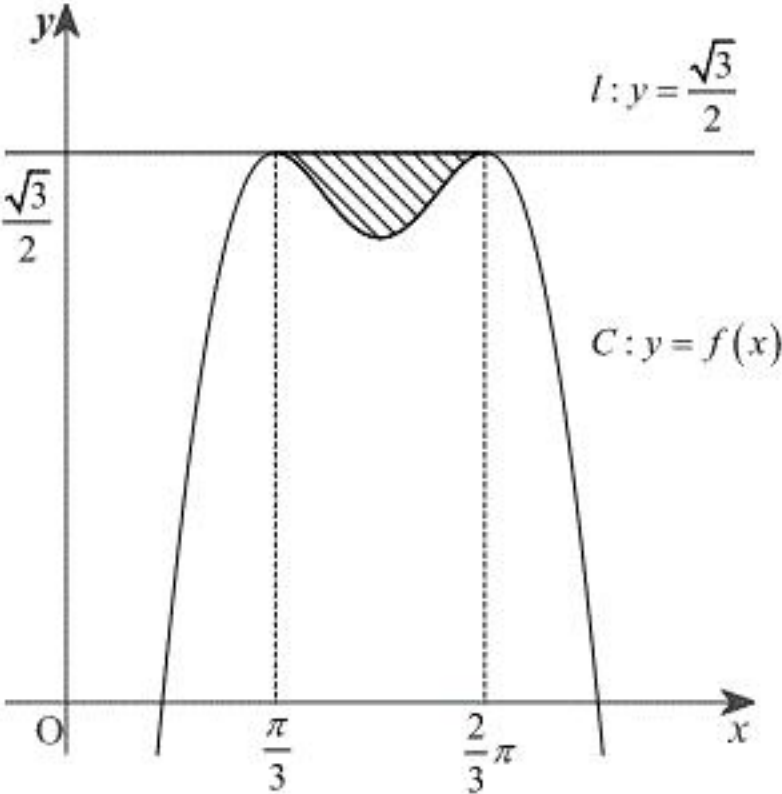
となる。このとき、 $0 < x < \frac{2}{3}\pi$ において $\sin x + \frac{\sqrt{3}}{6} > 0$ であるから、求める値は
 $x_1 = \frac{\pi}{3}, x_2 = \frac{\pi}{2}, x_3 = \frac{2}{3}\pi$
 である。

(4) (3)の結果より、 $0 \leq x \leq \pi$ の範囲での関数 $f(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	0	...	$\frac{\pi}{3}$	...	$\frac{\pi}{2}$	...	$\frac{2}{3}\pi$	...	π
$f'(x)$		+	0	-	0	+	0	-	
$f(x)$	$-\sqrt{3}$		$\frac{\sqrt{3}}{2}$		$-1 + \sqrt{3}$		$\frac{\sqrt{3}}{2}$		$-\sqrt{3}$

したがって、 $0 \leq x \leq \pi$ の範囲で $f(x)$ は $x = \frac{\pi}{3}, \frac{2}{3}\pi$ のとき最大値 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ をとり、 $x = 0, \pi$ のとき最小値 $-\sqrt{3}$ をとる。

(5) (4)の結果より直線 l の方程式は $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ である。よって、 $x_1 \leq x \leq x_3$ の範囲において直線 l と曲線 C で囲まれた部分を図示すると下図の斜線部分のようになる。



したがって、求める面積は

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2}{3}\pi} \left\{ \frac{\sqrt{3}}{2} - f(x) \right\} dx &= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2}{3}\pi} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \sin 3x + \sqrt{3}\cos 2x \right) dx \\ &= \left[\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{3}\cos 3x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x \right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2}{3}\pi} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{6}\pi - \frac{5}{6} \end{aligned}$$

 である。

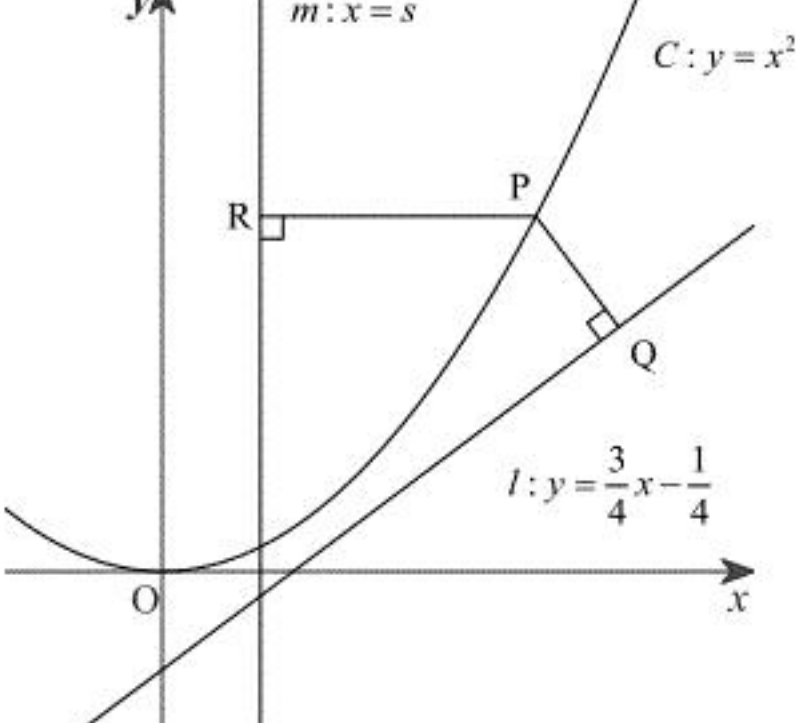
【Ⅲ】

【解答】

(1)	け	$\frac{4}{5}t^2 - \frac{3}{5}t + \frac{1}{5}$		
(2)	こ	$ s-t $		
(3)	さ	$\frac{3}{8}$	し	$\frac{7}{80}$
(4)	す	$\frac{-1-\sqrt{5}}{4}, \frac{-1+\sqrt{5}}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$		
(5)	せ	$\frac{3}{20} < s < \frac{3}{5}$		

【解説】

(1) 曲線 C ，2 直線 l, m および 3 点 P, Q, R を図示すると下図のようになる。



直線 l の方程式は

$$y = \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}$$
$$\Leftrightarrow 3x - 4y - 1 = 0$$

より，求める距離 PQ は点 (t, t^2) と直線 $3x - 4y - 1 = 0$ の距離に等しく，点と直線の距離の公式より

$$PQ = \frac{|3 \cdot t - 4 \cdot t^2 - 1|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{|-4t^2 + 3t - 1|}{5}$$

となる。

$$-4t^2 + 3t - 1 = -4\left(t - \frac{3}{8}\right)^2 - \frac{7}{16} < 0$$

より，求める距離 PQ は

$$PQ = \frac{4}{5}t^2 - \frac{3}{5}t + \frac{1}{5}$$

である。

(2) 直線 PR は直線 m に垂直であるから x 軸に平行な直線である。したがって，求める距離 PR は

$$PR = |s - t|$$

である。

(3) (1)より

$$PQ = \frac{4}{5}\left(t - \frac{3}{8}\right)^2 + \frac{7}{80}$$

であるから， PQ は $t = \frac{3}{8}$ のとき，最小値 $\frac{7}{80}$ をとる。

(4) (1), (2)の結果より， $s = \frac{2}{5}$ のとき

$$PQ = PR$$
$$\Leftrightarrow \frac{4}{5}t^2 - \frac{3}{5}t + \frac{1}{5} = \left|t - \frac{2}{5}\right|$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4t^2 - 8t + 3 = 0 & \left(t \geq \frac{2}{5}\right) \\ 4t^2 + 2t - 1 = 0 & \left(t < \frac{2}{5}\right) \end{cases}$$

となる。ここで，

$$4t^2 - 8t + 3 = 0$$
$$\Leftrightarrow (2t - 1)(2t - 3) = 0$$
$$\Leftrightarrow t = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$$

であり，これらは $t \geq \frac{2}{5}$ を満たしている。また，

$$4t^2 + 2t - 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow t = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$$

であり， $\frac{2}{5} - \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} = \frac{13 - 5\sqrt{5}}{20} = \frac{\sqrt{169} - \sqrt{125}}{20} > 0$ よりこれらは $t < \frac{2}{5}$ を満たしている。したがって，求める値は小さい順に

$$\frac{-1 - \sqrt{5}}{4}, \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$$

である。

(5) $PQ = PR$
 $\Leftrightarrow \frac{4}{5}t^2 - \frac{3}{5}t + \frac{1}{5} = |t - s|$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} 4t^2 - 8t + 5s + 1 = 0 & (t \geq s) \\ 4t^2 + 2t - 5s + 1 = 0 & (t < s) \end{cases}$
となる。よって， $N_s = 4$ となるのは， $4t^2 - 8t + 5s + 1 = 0$ が $t \geq s$ の範囲に異なる 2 つの実数解をもち， $4t^2 + 2t - 5s + 1 = 0$ が $t < s$ の範囲に異なる 2 つの実数解をもつときである。以下， t の値で場合分けをして考える。

[1] $t \geq s$ のとき

$f(t) = 4t^2 - 8t + 5s + 1$ とし， $f(t) = 0$ の判別式を D_1 とすると， $f(t) = 4(t - 1)^2 + 5s - 3$ より，満たすべき条件は

$$\begin{cases} D_1 > 0 \\ s < 1 \\ f(s) \geq 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 16 - 4(5s + 1) > 0 \\ s < 1 \\ 4s^2 - 3s + 1 \geq 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} s < \frac{3}{5} \\ s < 1 \\ 4\left(s - \frac{3}{8}\right)^2 + \frac{7}{16} \geq 0 \end{cases}$$
$$\therefore s < \frac{3}{5}$$

である。

[2] $t < s$ のとき

$g(t) = 4t^2 + 2t - 5s + 1$ とし， $g(t) = 0$ の判別式を D_2 とすると， $g(t) = 4\left(t + \frac{1}{4}\right)^2 - 5s + \frac{3}{4}$ より，満たすべき条件は

$$\begin{cases} D_2 > 0 \\ s > -\frac{1}{4} \\ g(s) > 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 4(-5s + 1) > 0 \\ s > -\frac{1}{4} \\ 4s^2 - 3s + 1 > 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} s > \frac{3}{20} \\ s > -\frac{1}{4} \\ 4\left(s - \frac{3}{8}\right)^2 + \frac{7}{16} > 0 \end{cases}$$
$$\therefore s > \frac{3}{20}$$

である。

以上，[1], [2]より，求める s の範囲は

$$\frac{3}{20} < s < \frac{3}{5}$$

である。