

【I】

【解答】

	最大	最小
(1)	B	C
(2)	C	A
(3)	A	C
(4)	C	B
(5)	B	A

【解説】

(1)

条件より、

$$\begin{aligned}g(x) &= -3x^2 + 8x - 4 \\h(x) &= -6x + 8 \\p(x) &= -6\end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned}g(1) &= 1 \\h(1) &= 2 \\p(1) &= -6\end{aligned}$$

となる。よって $B > A > C$ である。

(2)

最頻値は3回現れる6である。中央値は小さい方から10番目の数値と11番目の数値の平均、

すなわち $\frac{6+8}{2} = 7$ である。また、データの総和154をデータの大きさ20で割ることで、平均

値 $\frac{154}{20} = 7.7$ を得る。よって $C > B > A$ である。

(3)

与式の右辺について、

$$\begin{aligned}\frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+2} + \frac{c}{x^2-1} &= \frac{a(x-1)(x+2) + b(x^2-1) + c(x+2)}{(x^2-1)(x+2)} \\&= \frac{(a+b)x^2 + (a+c)x - 2a - b + 2c}{(x^2-1)(x+2)}\end{aligned}$$

となる。したがって、等式が x についての恒等式であるとき、

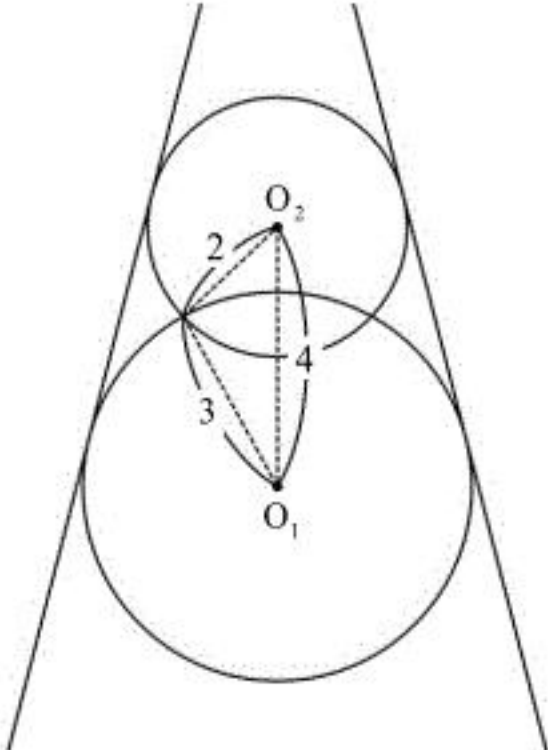
$$\begin{aligned}\begin{cases} a+b=1 \\ a+c=-1 \\ -2a-b+2c=-12 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=-2 \\ c=-4 \end{cases}\end{aligned}$$

である。よって $A > B > C$ である。

(4)

[1] A のとき

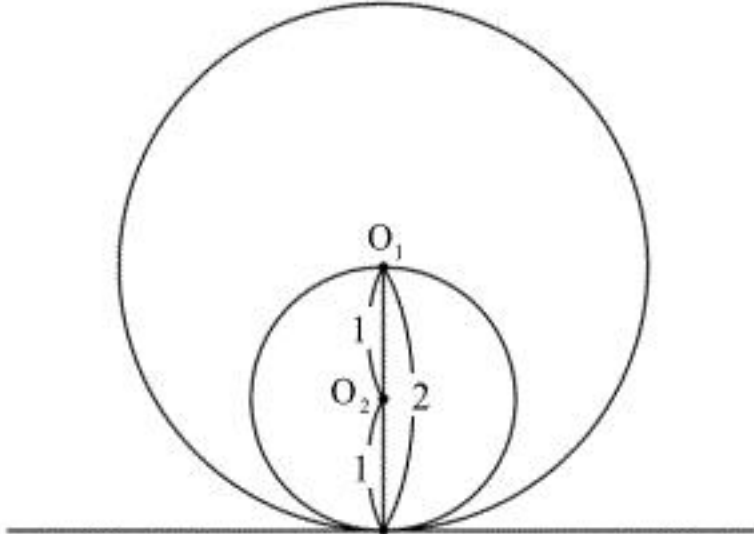
円 O_1 は中心 $(0, 0)$ 、半径3の円であり、円 O_2 は中心 $(0, 4)$ 、半径2の円であるから、2円の位置関係は下図のようになる。



上図より円 O_1, O_2 の共通接線の本数は2本とわかる。

[2] B のとき

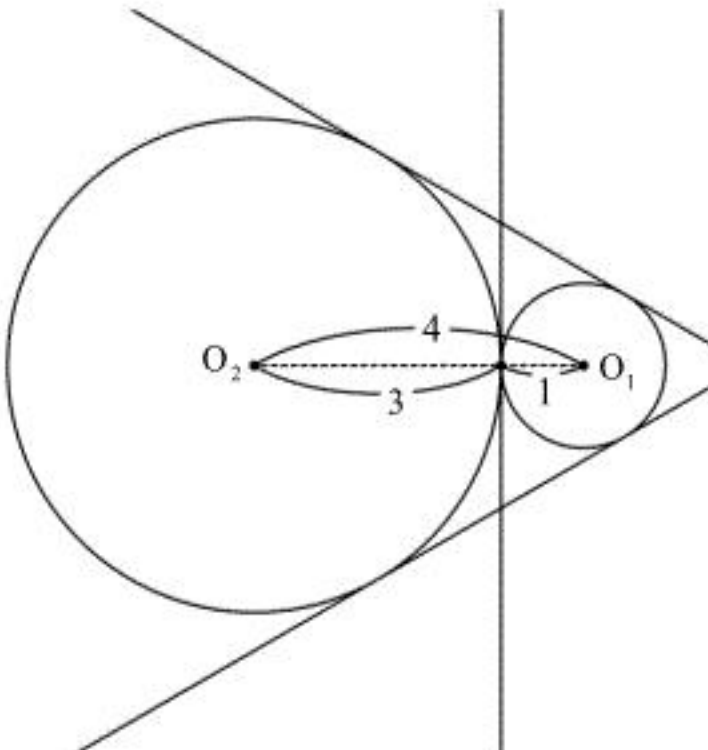
円 O_1 は中心 $(0, 0)$ 、半径2の円であり、円 O_2 は中心 $(0, -1)$ 、半径1の円であるから、2円の位置関係は下図のようになる。



上図より円 O_1, O_2 の共通接線の本数は1本とわかる。

[3] C のとき

円 O_1 は中心 $(0, 0)$ 、半径1の円であり、円 O_2 は中心 $(-4, 0)$ 、半径3の円であるから、2円の位置関係は下図のようになる。



上図より円 O_1, O_2 の共通接線の本数は3本とわかる。

以上, [1], [2], [3]より、 $C > A > B$ である。

(5)

逆と裏はそれぞれ対偶の関係にあるから、逆と裏の真偽は一致する。したがって、逆が偽で、裏が真である命題の数は0個である。また対偶が真である命題の数は、真である命題の数に等しく3つである。裏が真である命題の数は、逆が真である命題の数に等しく1つである。よって $B > C > A$ である。

〔Ⅱ〕

〔解答〕

(1)	ア	イ	ウ		
	4	4	7		
(2)	エ	オ	カ		
	2	2	1		
(3)	キ	ク			
	2	2			
(4)	ケ	コ	サ	シ	
	2	0	2	0	

〔解説〕

(1)

$$\begin{aligned}x &= \frac{2}{\sqrt{7} + \sqrt{5}} \\&= \frac{2(\sqrt{7} - \sqrt{5})}{(\sqrt{7} + \sqrt{5})(\sqrt{7} - \sqrt{5})} \\&= \sqrt{7} - \sqrt{5} \\y &= \frac{2}{\sqrt{7} - \sqrt{5}} \\&= \frac{2(\sqrt{7} + \sqrt{5})}{(\sqrt{7} - \sqrt{5})(\sqrt{7} + \sqrt{5})} \\&= \sqrt{7} + \sqrt{5}\end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned}x + y &= 2\sqrt{7} \\xy &= 2\end{aligned}$$

となる。よって、

$$\begin{aligned}x^3 + y^3 &= (x + y)^3 - 3xy(x + y) \\&= 56\sqrt{7} - 3 \cdot 2 \cdot 2\sqrt{7} \\&= 44\sqrt{7}\end{aligned}$$

である。

(2)

真数条件より $x > 0, y > 0$ である。このもとで、

$$\begin{aligned}\log_6 \frac{x}{2} + \log_6 3y &= 1 \\ \Leftrightarrow \log_6 \frac{3}{2}xy &= 1 \\ \Leftrightarrow \frac{3}{2}xy &= 6 \\ \therefore xy &= 4\end{aligned}$$

である。 $x > 0, y > 0$ であるから、相加平均・相乗平均の関係より、

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \cdot \frac{2}{\sqrt{xy}} = 1 \quad (\because xy = 4)$$

が成り立つ。等号成立条件は $\frac{1}{x} = \frac{1}{y}$ ，すなわち $x = y = 2$ である。よって、 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ の値は $x = y = 2$ で最小値1をとる。

(3)

初項 $a (> 0)$ 、公差 b の等差数列の一般項は $a + b(n - 1)$ と表される。また、初項 b 、公比 a の等比数列の一般項は $b \cdot a^{n-1}$ と表される。したがって条件より、

$$\begin{aligned}\begin{cases} a + b = a^2b \\ a + 3b = a^4b \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a = b(a^2 - 1) \\ a = b(a^4 - 3) \end{cases} \qquad \cdots \cdots \textcircled{1}\end{aligned}$$

と変形できる。したがって辺々引いて、

$$\begin{aligned}b(a^4 - a^2 - 2) &= 0 \\ \Leftrightarrow b(a^2 - 2)(a^2 + 1) &= 0 \\ \therefore a &= \sqrt{2} \text{ または } b = 0 \quad (\because a > 0)\end{aligned}$$

となる。ここで①より、 $b = 0$ のとき $a = 0$ となるが、これは $a > 0$ なる条件に反し不適である。よって①より、 $a = b = \sqrt{2}$ を得る。

(4)

7で割ると4余り、11で割ると7余る自然数は、非負整数 k, l を用いて $7k + 4, 11l + 7$ と2通りで表せる。ここで、18はこのような数の1つであるから、

$$\begin{aligned}7k + 4 &= 11l + 7 \\ 7 \cdot 2 + 4 &= 11 \cdot 1 + 7\end{aligned}$$

が成り立つ。辺々引くと、

$$7(k - 2) = 11(l - 1)$$

となる。7, 11は互いに素であるから $k - 2$ は11の倍数であり、非負整数 a を用いて $k - 2 = 11a$ とおける。したがって、7で割ると4余り、11で割ると7余る自然数は

$$\begin{aligned}7k + 4 &= 7(11a + 2) + 4 \\ &= 77a + 18\end{aligned}$$

と表せる。よって、

$$\begin{aligned}77a + 18 &\cdot 2024 \\ \Leftrightarrow a &\cdot 26.0 \cdots\end{aligned}$$

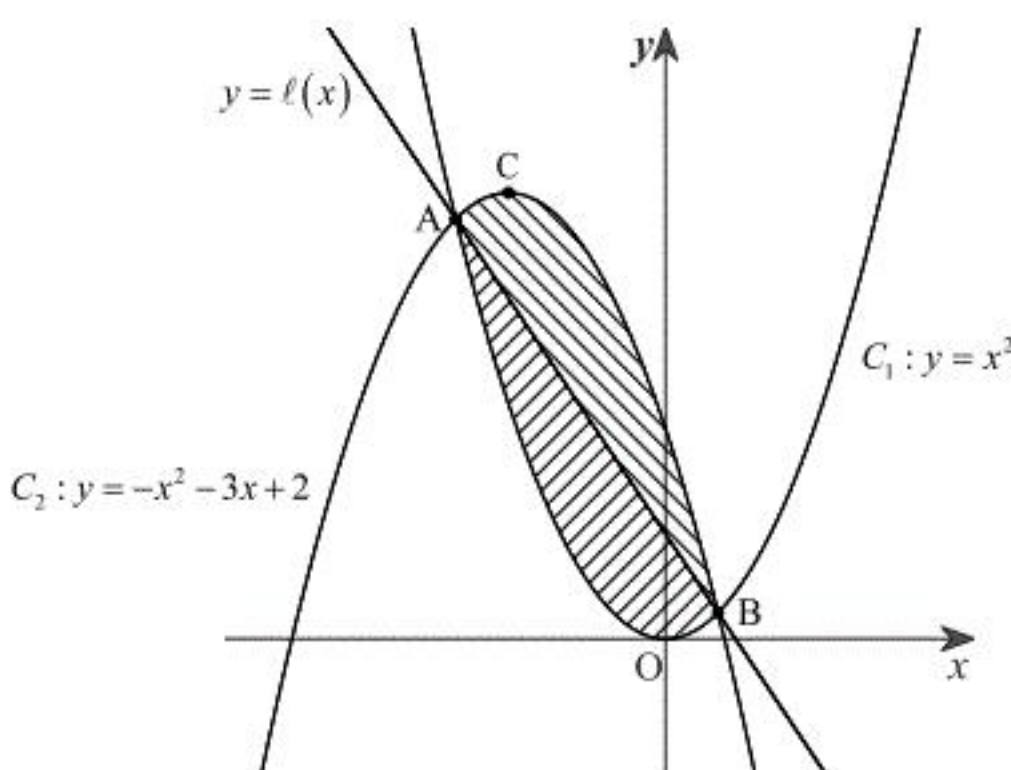
より、求める数の値は $77 \cdot 26 + 18 = 2020$ である。

〔Ⅲ〕

〔解答〕

$$(1) \quad A(-2, 4), B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right), C\left(-\frac{3}{2}, \frac{17}{4}\right)$$

(2)



C_1 と直線 AB で囲まれた図形の面積が ϵ , C_2 と直線 AB で囲まれた図形の面積に等しいことを示す。直線 AB の方程式を $y = \ell(x)$ とおくと, $-2 \cdot x - \frac{1}{2}$ において $x^2 \cdot \ell(x) - x^2 - 3x + 2$ が成り立つ。(1)より C_1, C_2 , 直線 AB は 2 点 A, B で交わるから, C_1 と直線 AB で囲まれた図形の面積は,

$$\int_{-2}^{\frac{1}{2}} \{\ell(x) - x^2\} dx = -\int_{-2}^{\frac{1}{2}} (x+2) \left(x - \frac{1}{2}\right) dx$$

と表せる。同様に, C_2 と直線 AB で囲まれた図形の面積は,

$$\int_{-2}^{\frac{1}{2}} \{-x^2 - 3x + 2 - \ell(x)\} dx = -\int_{-2}^{\frac{1}{2}} (x+2) \left(x - \frac{1}{2}\right) dx$$

と表せる。以上より題意が示された。

(証明終)

(3)

(1)より, 線分 AB の中点の座標は

$$\left(\frac{1}{2} \cdot \left(-2 + \frac{1}{2}\right), \frac{1}{2} \cdot \left(4 + \frac{1}{4}\right)\right) = \left(-\frac{3}{4}, \frac{17}{8}\right)$$

となる。線分 OC の中点の座標は

$$\left(\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right), \frac{1}{2} \cdot \frac{17}{4}\right) = \left(-\frac{3}{4}, \frac{17}{8}\right)$$

となり, 線分 AB の中点と線分 OC の中点は一致する。

(証明終)

(4)

(3)より四角形 $AOBC$ は平行四辺形である。四角形 $AOBC$ の面積を S とおくと, (1)より

$$A(-2, 4), B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) \text{ であるから,}$$

$$\begin{aligned} S &= 2 \cdot \triangle OAB \\ &= 2 \cdot \frac{1}{2} \left| -2 \cdot \frac{1}{4} - 4 \cdot \frac{1}{2} \right| \\ &= \frac{5}{2} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{5}{2}$

〔解説〕

(1)

C_1, C_2 の共有点の x 座標は,

$$\begin{aligned} x^2 &= -x^2 - 3x + 2 \\ \Leftrightarrow 2x^2 + 3x - 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x+2)(2x-1) &= 0 \\ \therefore x &= -2, \frac{1}{2} \end{aligned}$$

である。したがって, $A(-2, 4), B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ である。また, C_1 の頂点 O は原点であり,

$$\begin{aligned} C_2: y &= -x^2 - 3x + 2 \\ &= -\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{17}{4} \end{aligned}$$

と変形できるから, $C\left(-\frac{3}{2}, \frac{17}{4}\right)$ である。

[Ⅳ]

(1)

$$\begin{aligned} 3\overrightarrow{OA} + 4\overrightarrow{OB} + 5\overrightarrow{OC} &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow -3\overrightarrow{AO} + 4(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AO}) + 5(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AO}) &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow 12\overrightarrow{AO} &= 4\overrightarrow{AB} + 5\overrightarrow{AC} \\ \therefore \overrightarrow{AO} &= \frac{3}{4} \cdot \frac{4\overrightarrow{AB} + 5\overrightarrow{AC}}{9} \end{aligned}$$

と変形できる。点 P は直線 AO と辺 BC の交わる点であるから、 $\overrightarrow{AP} = \frac{4\overrightarrow{AB} + 5\overrightarrow{AC}}{9}$ である。よって、 $BP:PC = 5:4$, $AO:OP = 3:1$ を得る。

(答) $BP:PC = 5:4$, $AO:OP = 3:1$

(2)

$$\begin{aligned} 3\overrightarrow{OA} + 4\overrightarrow{OB} + 5\overrightarrow{OC} &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow 4\overrightarrow{OB} &= -3\overrightarrow{OA} - 5\overrightarrow{OC} \end{aligned}$$

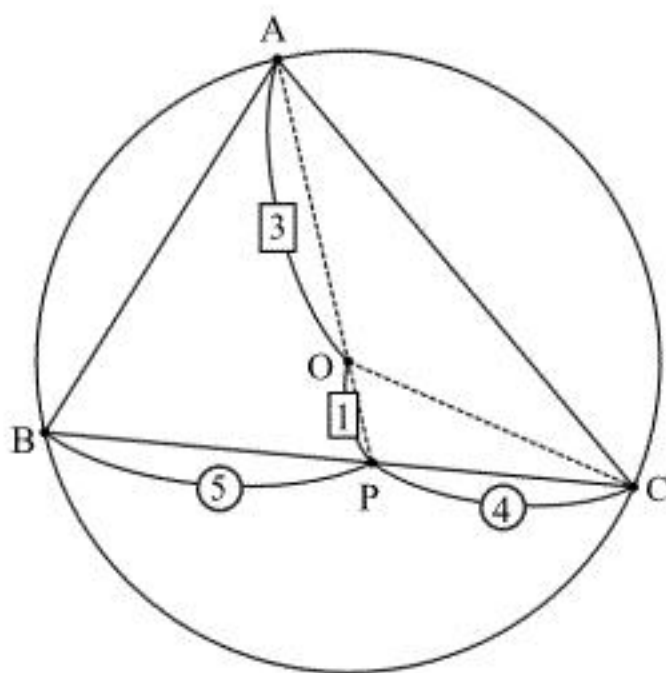
である。円 O は半径を 1 とする、 $\triangle ABC$ の外接円であるから、両辺の絶対値の 2 乗を考えて、

$$\begin{aligned} |4\overrightarrow{OB}|^2 &= |-3\overrightarrow{OA} - 5\overrightarrow{OC}|^2 \\ \Leftrightarrow 16|\overrightarrow{OB}|^2 &= 9|\overrightarrow{OA}|^2 + 30\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} + 25|\overrightarrow{OC}|^2 \\ \therefore \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} &= -\frac{3}{5} \left(\because |\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OC}| = 1 \right) \end{aligned}$$

を得る。

(答) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = -\frac{3}{5}$

(3)



(2)より,

$$\begin{aligned} \angle AOC &= \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{OA}|^2 |\overrightarrow{OC}|^2 - (\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC})^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{9}{25}} \\ &= \frac{2}{5} \end{aligned}$$

である。よって、(1)より,

$$\begin{aligned} \angle ABC &= \frac{9}{4} \angle APC \\ &= \frac{9}{4} \cdot \frac{4}{3} \angle AOC \\ &= \frac{6}{5} \end{aligned}$$

を得る。

(答) $\angle ABC = \frac{6}{5}$

〔V〕

〔解答〕

(1) $\frac{1}{6}$

(2) サイコロの目の出方は $6^3 = 216$ (通り) 存在し、これらは同様に確からしい。 $y = -ax + b$ と $y = x - c$ の共有点が直線 $y = 0$ 上にあるのは、2 直線の x 切片に関して、 $\frac{b}{a} = c$ が成り立つときである。このような目の出方は、
 $(a, b, c) = (1, 1, 1), (1, 2, 2), (1, 3, 3), (1, 4, 4), (1, 5, 5), (1, 6, 6), (2, 2, 1),$
 $(2, 4, 2), (2, 6, 3), (3, 3, 1), (3, 6, 2), (4, 4, 1), (5, 5, 1), (6, 6, 1)$
 の 14 通り存在し、求める確率は

$$\frac{14}{216} = \frac{7}{108}$$
 となる。

(答) $\frac{7}{108}$

(3) サイコロの目の出方は $6^2 = 36$ (通り) 存在し、これらは同様に確からしい。 $y = x^2 + ax + b$ が直線 $y = 0$ と共有点をもつのは、 $x^2 + ax + b = 0$ の判別式に関して、 $a^2 - 4b \geq 0$ が成り立つときである。このような目の出方は、
 $(a, b) = (2, 1), (3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (5, 1), (5, 2), (5, 3),$
 $(5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)$
 の 19 通り存在し、求める確率は $\frac{19}{36}$ となる。

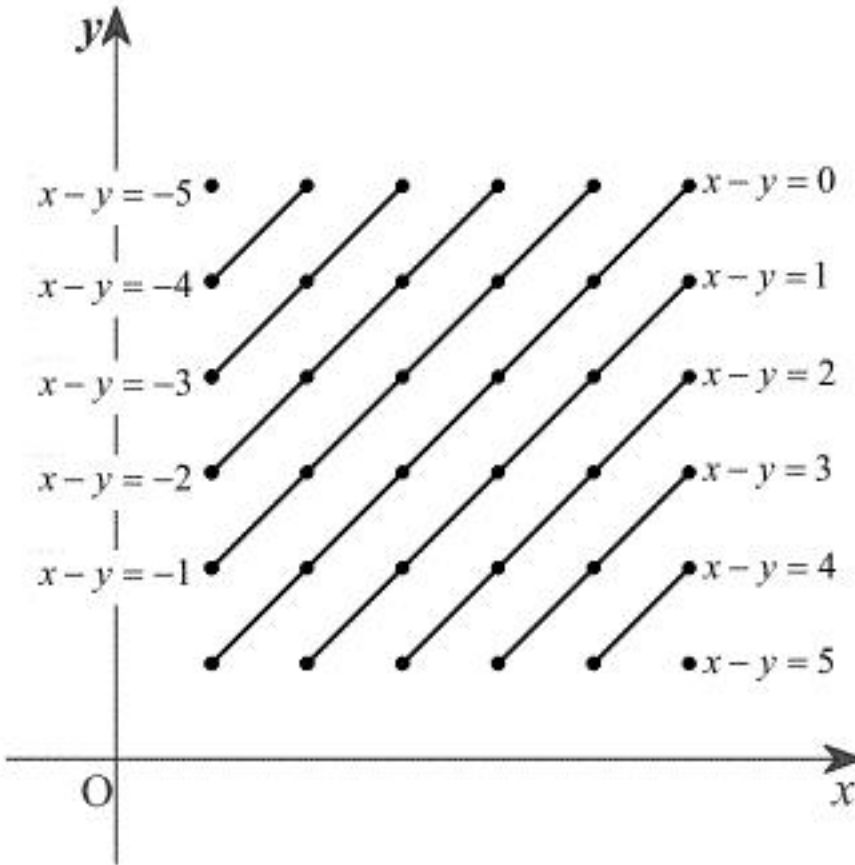
(答) $\frac{19}{36}$

(4) サイコロの目の出方は 6^4 通り存在し、これらは同様に確からしい。 $y = x^2 + 2ax + b$ と $y = 2cx + d$ の共有点の個数が 0 個または 2 個となる事象の余事象は、 $y = x^2 + 2ax + b$ と $y = 2cx + d$ の共有点の個数が 1 個となる場合である。このとき、 $x^2 + 2(a - c)x + b - d = 0$ はただ 1 つの解をもつ、すなわち $x^2 + 2(a - c)x + b - d = 0$ の判別式に関して、

$$(a - c)^2 - (b - d) = 0$$

$$\Leftrightarrow (a - c)^2 = b - d \qquad \cdots \cdots \text{①}$$

となる。ここで、1 個のサイコロを 2 回投げたときに outcomes を順番に x, y とするとき、座標平面上で点 (x, y) が取りうるのは以下の格子点である。



- [1] $|a - c| = 0$ のとき
 このような (a, c) の組は 6 通り存在し、①を満たす (b, d) の組は 6 通り存在する。したがって、このときの場合の数は
 $6 \cdot 6 = 36$ (通り)
 である。
- [2] $|a - c| = 1$ のとき
 このような (a, c) の組は $5 \cdot 2 = 10$ (通り) 存在し、①を満たす (b, d) の組は 5 通り存在する。したがって、このときの場合の数は
 $10 \cdot 5 = 50$ (通り)
 である。
- [3] $|a - c| = 2$ のとき
 このような (a, c) の組は $4 \cdot 2 = 8$ (通り) 存在し、①を満たす (b, d) の組は 2 通り存在する。したがって、このときの場合の数は
 $8 \cdot 2 = 16$ (通り)
 である。
- [4] $|a - c| \geq 3$ のとき
 このとき、①を満たす (b, d) の組は存在せず不適である。

以上, [1] ~ [4] より、余事象の確率は

$$\frac{36 + 50 + 16}{6^4} = \frac{17}{216}$$

であるから、求める確率は

$$1 - \frac{17}{216} = \frac{199}{216}$$

である。

(答) $\frac{199}{216}$

〔解説〕

(1) サイコロの目の出方は $6^2 = 36$ (通り) 存在し、これらは同様に確からしい。 $y = x + a$ と $y = -x + b$ の共有点が y 軸にあるのは、2 直線の y 切片に関して、 $a = b$ が成り立つときである。このような目の出方は 6 通り存在し、求める確率は

$$\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$
 となる。