

【I】

【解答】

(1)	ア	イ	ウ	エ
	7	2	0	0
(2)	オ	カ	キ	ク
	8	4	0	0
(3)	ケ	コ	サ	シ
	1	1	2	0
(4)	ス	セ		
	1	4		
(5)	ソ	タ		
	1	8		
(6)	チ	ツ		
	9	3		

【解説】

(1)
偶数のカードと奇数のカードはそれぞれ5枚ずつあるため、偶数のカードを3枚選んで並べる方法と奇数のカードを3枚選んで並べる方法は共に ${}_5P_3=60$ (通り)である。よって、求める場合の数は、
$$2\cdot 60^2=7200$$
(通り)
である。

(2)
2枚以上の奇数のカードどうしが隣り合わないのは、選んだ奇数のカードが2枚または3枚のときのみである。以下、選んだ奇数のカードの枚数により場合分けをする。

[1] 選んだ奇数のカードが2枚のとき
偶数のカードを3枚選んで並べる方法は ${}_5P_3=60$ (通り)である。また、奇数のカードを2枚選び、それらを偶数の間または両端の4か所に並べる方法は ${}_5C_2\cdot {}_4P_2=120$ (通り)である。よって、条件をみたす並べ方は、
$$60\cdot 120=7200$$
(通り)
である。

[2] 選んだ奇数のカードが3枚のとき
偶数のカードを2枚選んで並べるときの並べ方は ${}_5P_2=20$ (通り)である。また、奇数のカードを3枚選んで並べる方法は ${}_5P_3=60$ (通り)である。よって、条件をみたす並べ方は、
$$20\cdot 60=1200$$
(通り)
である。

以上、[1],[2]より、求める場合の数は、
$$7200+1200=8400$$
(通り)
となる。

(3)
偶数のカードと奇数のカードを2枚ずつ選んで一列に並べるとき、カードの選び方は
$$\left({}_5C_2\right)^2=100$$
(通り)であり、選んだカードを右端の数字が偶数となる並べ方はそれぞれ
$$2\cdot 3!=12$$
(通り)である。よって、右端の数字が偶数となる並べ方は、
$$100\cdot 12=1200$$
(通り)
である。また、この並べ方のうち、左端の数字が0となるのは、並んだカードの数字が左から0、奇数、奇数、偶数となるときであるため、並べ方は、
$$1\cdot {}_5P_2\cdot {}_4C_1=80$$
(通り)
である。よって、求める場合の数は、
$$1200-80=1120$$
(通り)
である。

(4)
$$ab-bc-cd+da=1$$
$$\Leftrightarrow (a-c)(b+d)=1$$

となる。ここで、 $a-c, b+d$ は整数であり、 $0\leq b\leq 9, 0\leq d\leq 9$ と $b\neq d$ より、 $b+d\geq 1$ であるため、
$$a-c=b+d=1$$

となる。よって、条件を満たす組 (b, d) は、
$$(b, d)=(1, 0), (0, 1)$$

の2通りであり、 $\{b, d\}=\{0, 1\}$ であるため、 $2\leq a\leq 9, 2\leq c\leq 9$ である。したがって、条件を満たす組 (a, c) は、
$$(a, c)=(3, 2), (4, 3), (5, 4), (6, 5), (7, 6), (8, 7), (9, 8)$$

の7通りある。以上より、求める a, b, c, d の組み合わせは、
$$2\cdot 7=14$$
(通り)
である。

(5)
$$\begin{aligned}\int_b^a(3x^2-2ax-b)dx &= \left[x^3-ax^2-bx\right]_b^a \\ &= (a^3-b^3)-a(a^2-b^2)-b(a-b) \\ &= (a-b)\{(a^2+ab+b^2)-a(a+b)-b\} \\ &= (a-b)(b^2-b) \\ &= (a-b)b(b-1)\end{aligned}$$

であり、 $a\neq b$ より、
$$\begin{aligned}\int_b^a(3x^2-2ax-b)dx &= 0 \\ \Leftrightarrow b &= 0, 1\end{aligned}$$

となる。よって、条件を満たす a, b の組み合わせは、
$$2\cdot 9=18$$
(通り)
である。

(6)
$$\begin{aligned}\log_5 3^{ab}\cdot \log_7 4 &= \log_5 2\cdot \log_7 27^{bc} \\ \Leftrightarrow ab\log_5 3\cdot \frac{2\log_5 2}{\log_5 7} &= \log_5 2\cdot \frac{3bc\log_5 3}{\log_5 7} \\ \Leftrightarrow 2ab &= 3bc \\ \Leftrightarrow b(2a-3c) &= 0 \\ \Leftrightarrow b=0 \text{ または } 2a &= 3c\end{aligned}$$

となる。以下、 b の値により場合分けをする。
[1] $b=0$ のとき
このとき、等式を満たすため、 $a\neq c, a, c\neq 0$ より、条件を満たす a, c の組み合わせは、
$$9\cdot 8=72$$
(通り)
である。
[2] $b\neq 0$ のとき
 $2a=3c$ をみたす a, c の組み合わせは、
$$(a, c)=(3, 2), (6, 4), (9, 6)$$

の3通りある。よって、 $b\neq 0, a, c$ より、条件を満たす a, b, c の組み合わせは、
$$3\cdot 7=21$$
(通り)
である。
以上、[1],[2]より、求める a, b, c の組み合わせは、
$$72+21=93$$
(通り)
である。

〔Ⅱ〕

〔解答〕

(1)	テ	ト	ナ	ニ	ヌ				
	2	6	2	1	0				
(2)	ネ	ノ	ハ	ヒ	フ	ヘ	ホ		
	7	6	5	6	5	1	6		
(3)	マ	ミ	ム	メ	モ	ヤ	ユ	ヨ	ラ
	3	2	1	7	2	5	9	3	4
(4)	リ	ル	レ	ロ	ワ				
	2	0	0	1	7				

〔解説〕

(1) 点 P (1, 0) を通る直線の傾きを m とおくと、この直線の方程式は $y = m(x - 1)$ と表せる。この直線が放物線 $y = x^2 - 3x + 6$ と接するとき、 x についての 2 次方程式

$$\begin{aligned} x^2 - 3x + 6 &= m(x - 1) \\ \Leftrightarrow x^2 - (m + 3)x + m + 6 &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(x - \frac{m + 3}{2}\right)^2 &= \frac{m^2 + 2m - 15}{4} \end{aligned}$$

が重解をもつ。よって、 m の値は、

$$\begin{aligned} \frac{m^2 + 2m - 15}{4} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{4}(m + 5)(m - 3) &= 0 \\ \Leftrightarrow m &= -5, 3 \end{aligned}$$

であり、このとき、重解は $x = \frac{m + 3}{2}$ である。 $m = -5$ のとき、 $\frac{m + 3}{2} = -1$ 、 $m = 3$ のとき、

$\frac{m + 3}{2} = 3$ であるため、点 A, B の x 座標はそれぞれ 3, -1 である。したがって、

$$\begin{aligned} A(3, 6), B(-1, 10) \text{ であり、} P(1, 0) \text{ より、求めるベクトルは、} \\ \overrightarrow{PA} = (2, 6), \overrightarrow{PB} = (-2, 10) \end{aligned}$$

である。

(2) (1)より、

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{PA}| &= \sqrt{2^2 + 6^2} = 2\sqrt{10} \\ |\overrightarrow{PB}| &= \sqrt{(-2)^2 + 10^2} = 2\sqrt{26} \\ \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} &= 2 \cdot (-2) + 6 \cdot 10 = 56 \end{aligned}$$

となるため、

$$\cos \angle APB = \frac{\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}}{|\overrightarrow{PA}| |\overrightarrow{PB}|} = \frac{56}{2\sqrt{10} \cdot 2\sqrt{26}} = \frac{7\sqrt{65}}{65}$$

である。また、 $0 < \angle APB < \pi$ より、 $\sin \angle APB > 0$ であるため、

$$\sin \angle APB = \sqrt{1 - \cos^2 \angle APB} = \sqrt{1 - \frac{49}{65}} = \frac{4}{\sqrt{65}}$$

となる。よって、三角形 APB の面積は、

$$\frac{1}{2} \cdot PA \cdot PB \cdot \sin \angle APB = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{10} \cdot 2\sqrt{26} \cdot \frac{4}{\sqrt{65}} = 16$$

である。

(3)

$$x^2 - 3x + 6 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{15}{4}$$

より、放物線 $y = x^2 - 3x + 6$ の頂点 Q の座標は $\left(\frac{3}{2}, \frac{15}{4}\right)$ である。よって、 $\overrightarrow{PQ} = \left(\frac{1}{2}, \frac{15}{4}\right)$ であ

る。ここで、点 R は直線 PQ 上にあるため、実数 k を用いて、

$$\overrightarrow{PR} = k\overrightarrow{PQ} = k\left(\frac{1}{2}, \frac{15}{4}\right) = \left(\frac{1}{2}k, \frac{15}{4}k\right)$$

と表せる。一方、点 R は直線 AB 上に存在するため、実数 l を用いて、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PR} &= (1 - l)\overrightarrow{PA} + l\overrightarrow{PB} \\ &= (2(1 - l) - 2l, 6(1 - l) + 10l) \\ &= (2 - 4l, 6 + 4l) \end{aligned}$$

と表せる。よって、

$$\begin{aligned} \begin{cases} \frac{1}{2}k = 2 - 4l \\ \frac{15}{4}k = 6 + 4l \end{cases} \\ \therefore (k, l) = \left(\frac{32}{17}, \frac{9}{34}\right) \end{aligned}$$

となるため、

$$\overrightarrow{PR} = \frac{32}{17}\overrightarrow{PQ} = \frac{25}{34}\overrightarrow{PA} + \frac{9}{34}\overrightarrow{PB}$$

である。

(4)

(2)より、三角形 APB の面積は 16 であり、(3)より、 $AR : BR = 9 : 25$ であるため、三角形 BPR の面積は、

$$\triangle BPR = \frac{25}{34}\triangle APB = \frac{25}{34} \cdot 16 = \frac{200}{17}$$

である。

〔Ⅲ〕

〔解答〕

(1)	あ	い	う	え	お	か	き
	1	0	2	4	3	4	1
(2)	$n \text{ が奇数のとき } \left((-2)^{\frac{n-1}{2}}, (-2)^{\frac{n+1}{2}} \right)$ $n \text{ が偶数のとき } \left((-2)^{\frac{n}{2}}, (-2)^{\frac{n}{2}} \right)$						
(3)	$9 \cdot 4^{k-1}$						
(4)	$n = 3, 4, 5$						

〔解説〕

(1)

m を自然数とする。 n が偶数のとき、 $n = 2m$ とおくと、漸化式より、 $a_{2m+2} = -2a_{2m}$ であるため、 $a_2 = -2$ より、

$$a_{2m} = a_2 \cdot (-2)^{m-1} = (-2)^m$$

である。よって、 $20 = 2 \cdot 10$ より、数列 $\{a_n\}$ の第20項は、

$$a_{20} = (-2)^{10} = 1024$$

である。また、 n が奇数のとき、 $n = 2m-1$ とおくと、漸化式より、 $a_{2m+1} = -2a_{2m-1}$ であるため、 $a_1 = 1$ より、

$$a_{2m-1} = a_1 \cdot (-2)^{m-1} = (-2)^{m-1}$$

である。よって、数列 $\{a_n\}$ の初項から第20項までの和は、

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{20} a_n &= \sum_{m=1}^{10} (a_{2m-1} + a_{2m}) \\ &= \sum_{m=1}^{10} \{ (-2)^{m-1} + (-2)^m \} \\ &= - \sum_{m=1}^{10} (-2)^{m-1} \\ &= - \frac{1 - (-2)^{10}}{1 - (-2)} \\ &= 341 \end{aligned}$$

である。

(2)

(1)より、 n が奇数のとき、 $n = 2m-1$ とすると、 $m = \frac{n+1}{2}$ より、点 P_n の座標は、

$$(a_n, a_{n+1}) = (a_{2m-1}, a_{2m}) = \left((-2)^{m-1}, (-2)^m \right) = \left((-2)^{\frac{n-1}{2}}, (-2)^{\frac{n+1}{2}} \right)$$

となる。また、 n が偶数のとき、 $n = 2m$ とすると、 $m = \frac{n}{2}$ より、点 P_n の座標は、

$$(a_n, a_{n+1}) = (a_{2m}, a_{2m+1}) = \left((-2)^m, (-2)^m \right) = \left((-2)^{\frac{n}{2}}, (-2)^{\frac{n}{2}} \right)$$

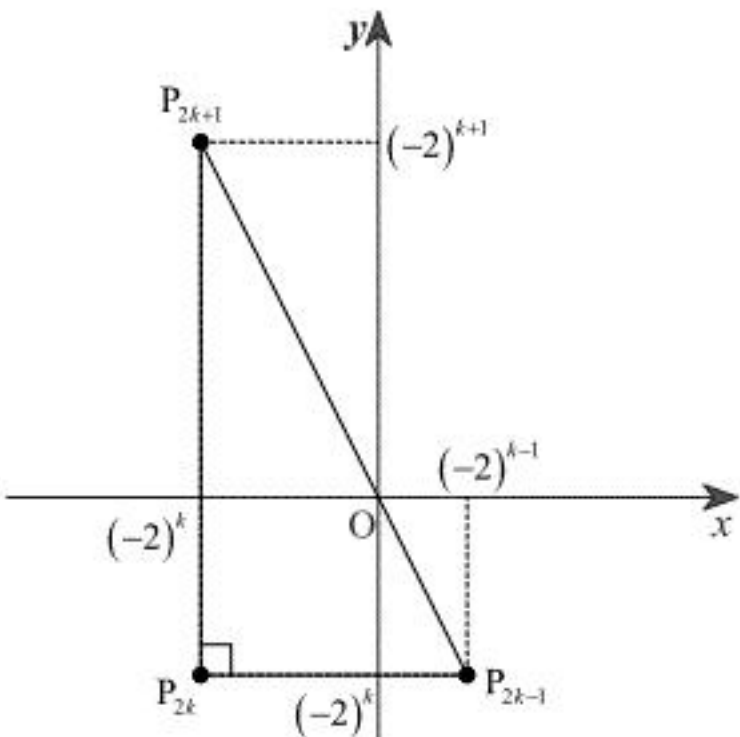
となる。

(3)

(2)より、自然数 k に対し、3点 P_{2k-1} 、 P_{2k} 、 P_{2k+1} の座標は、

$$P_{2k-1} \left((-2)^{k-1}, (-2)^k \right), P_{2k} \left((-2)^k, (-2)^k \right), P_{2k+1} \left((-2)^k, (-2)^{k+1} \right)$$

である。このとき、3点 P_{2k-1} 、 P_{2k} 、 P_{2k+1} の位置関係は下図の通りである。



上図より、三角形 $P_{2k-1}P_{2k}P_{2k+1}$ は $\angle P_{2k-1}P_{2k}P_{2k+1} = \frac{\pi}{2}$ の直角三角形であり、

$$\begin{aligned} P_{2k-1}P_{2k} &= \left| (-2)^{k-1} - (-2)^k \right| = 3 \cdot 2^{k-1} \\ P_{2k}P_{2k+1} &= \left| (-2)^{k+1} - (-2)^k \right| = 3 \cdot 2^k \end{aligned}$$

である。よって、求める面積は、

$$S_k = \frac{1}{2} \cdot P_{2k-1}P_{2k} \cdot P_{2k-1}P_{2k} = \frac{1}{2} \cdot (3 \cdot 2^{k-1}) \cdot (3 \cdot 2^k) = 9 \cdot 4^{k-1}$$

である。

(4)

(3)より、自然数 n に対し、

$$\sum_{k=1}^n S_k = \sum_{k=1}^n 9 \cdot 4^{k-1} = 9 \cdot \frac{4^n - 1}{4 - 1} = 3(4^n - 1)$$

となるため、

$$\begin{aligned} 100 &< \sum_{k=1}^n S_k < 10000 \\ \Leftrightarrow 100 &< 3(4^n - 1) < 10000 \\ \Leftrightarrow \frac{100}{3} + 1 &< 4^n < \frac{10000}{3} + 1 \end{aligned}$$

である。ここで、

$$\begin{aligned} 4^2 &= 16 < \frac{100}{3} + 1 = 34 + \frac{1}{3} < 64 = 4^3 \\ 4^5 &= 1024 < \frac{10000}{3} + 1 = 3334 + \frac{1}{3} < 4096 = 4^6 \end{aligned}$$

であり、 4^n は n に関して単調増加であるため、求める自然数 n は

$$n = 3, 4, 5$$

である。