

【Ⅰ】

【解答】

(1)	ア	イ	ウ	エ	オ						
	7	9	9	1	3						
(2)	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ		
	1	4	1	3	3	8	3	2	2		
(3)	ア	イ	ウ	エ	オ	カ					
	2	4	3	1	2	5					
(4)	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	サ
	1	3	2	4	0	3	5	4	1	1	5
(5)	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ		
	3	2	2	3	1	2	5	7	6		

解説]

①

【解説】

(1)①

2 次方程式 $2x^2 - 7x + 9 = 0$ において、解と係数の関係より

$$\alpha + \beta = \frac{7}{2}, \alpha\beta = \frac{9}{2}$$

が成り立つ。よって、求める値は

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} &= \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} \\ &= \frac{7}{9} \end{aligned}$$

である。

②

2 次方程式 $2x^2 + sx + t = 0$ の解が $\alpha - 4, \beta - 4$ であるから、解と係数の関係より

$$\begin{cases} (\alpha - 4) + (\beta - 4) = -\frac{s}{2} \\ (\alpha - 4)(\beta - 4) = \frac{t}{2} \end{cases}$$

が成り立つ。 $\alpha + \beta = \frac{7}{2}, \alpha\beta = \frac{9}{2}$ より

$$\begin{cases} s = -2(\alpha + \beta - 8) \\ t = 2\{\alpha\beta - 4(\alpha + \beta) + 16\} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} s = 9 \\ t = 13 \end{cases}$$

となる。

(2)①

$x = \cos \theta, y = \sin \theta$ より

$$\begin{aligned} xy &= \cos \theta \sin \theta \\ &= \frac{1}{2} \sin 2\theta \end{aligned}$$

と変形できる。 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ より、 $0 \leq 2\theta \leq \pi$ であるから、 xy が最大となるのは $2\theta = \frac{\pi}{2}$ 、つま

り $\theta = \frac{\pi}{4}$ のときである。

②

与えられた式を変形して

$$x + \sqrt{3}y = \cos \theta + \sqrt{3} \sin \theta$$

$$= 2 \sin \left(\theta + \frac{\pi}{6} \right)$$

を得る。 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ より、 $\frac{\pi}{6} \leq \theta + \frac{\pi}{6} \leq \frac{2\pi}{3}$ であるから、 $x + \sqrt{3}y$ が最大となるのは $\theta + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$ 、

つまり $\theta = \frac{\pi}{3}$ のときである。

③

与えられた式を変形して

$$x^2 + xy + 2y^2 = \cos^2 \theta + \cos \theta \sin \theta + 2 \sin^2 \theta$$

$$= 1 + \cos \theta \sin \theta + \sin^2 \theta$$

$$= 1 + \frac{\sin 2\theta}{2} + \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$$

$$= \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \sin 2\theta - \frac{1}{2} \cos 2\theta$$

$$= \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \left(2\theta - \frac{\pi}{4} \right)$$

を得る。 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ より、 $-\frac{\pi}{4} \leq 2\theta - \frac{\pi}{4} \leq \frac{3}{4}\pi$ であるから、 $x^2 + xy + 2y^2$ が最大となるのは

$2\theta - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ 、つまり $\theta = \frac{3}{8}\pi$ のときであり、このとき $\frac{3 + \sqrt{2}}{2}$ をとる。

(3)①

線分 AB を 3 : 2 に外分する点の座標は

$$\left(\frac{-2 \cdot (-1) + 3 \cdot 0}{3 - 2}, \frac{-2 \cdot 1 + 3 \cdot 2}{3 - 2} \right), \text{すなわち } (2, 4)$$

と求められる。

②

$$\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OC} = (x - 1, y + 3)$$

$$2\overrightarrow{AP} = 2(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}) = (2x + 2, 2y - 2)$$

$$3\overrightarrow{BP} = 3(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OB}) = (3x, 3y - 6)$$

より

$$\overrightarrow{CP} \cdot (2\overrightarrow{AP} - 3\overrightarrow{BP}) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)(-x + 2) + (y + 3)(-y + 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow -(x^2 - 3x + 2) - (y^2 - y - 12) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{3}{2} \right)^2 + \left(y - \frac{1}{2} \right)^2 = \frac{25}{2}$$

と変形できる。

④

与えられた数列 $\{a_n\}$ の一般項に $n = 2$ を代入して

$$a_2 = 2^2(-2^2 + 44 \cdot 2 - 51)$$

$$= 132$$

となる。

⑤

与えられた式を変形して

$$a_{n+1} - a_n = 2^{n+1} \left\{ -(n+1)^2 + 44(n+1) - 51 \right\} - 2^n \left\{ -n^2 + 44n - 51 \right\}$$

$$= 2^n \left\{ -2n^2 + 84n - 16 + n^2 - 44n + 51 \right\}$$

$$= 2^n \left\{ -n^2 + 40n + 35 \right\}$$

を得る。

$2^n > 0$ より $-n^2 + 40n + 35 > 0$ のとき $a_{n+1} > a_n$ であり、 $-n^2 + 40n + 35 < 0$ のとき $a_{n+1} < a_n$ である。ここで

$$-n^2 + 40n + 35 > 0$$

$$\Leftrightarrow 20 - \sqrt{435} < n < 20 + \sqrt{435}$$

であり、 $20 = \sqrt{400} < \sqrt{435} < \sqrt{441} = 21$ より、 $1 \leq n \leq 40$ のとき $-n^2 + 40n + 35 > 0$ である。また、同様に考えて、 $n \geq 41$ のとき $-n^2 + 40n + 35 < 0$ である。以上より

$$a_1 < a_2 < \cdots < a_{40} < a_{41}, a_{41} > a_{42} > \cdots$$

が成り立つ。よって、 a_n は $n = 41$ のとき最大となる。このとき

$$a_{41} = 2^{41} \left\{ -41^2 + 44 \cdot 41 - 51 \right\}$$

$$= 2^{41} \cdot 72$$

$$= 2^{44} \cdot 3^2$$

である。常用対数をとって

$$\log_{10} a_{41} = \log_{10} (2^{44} \cdot 3^2)$$

$$= 44 \log_{10} 2 + 2 \log_{10} 3$$

$$= 44 \cdot 0.30 + 2 \cdot 0.48$$

$$= 14.16$$

となる。よって $10^{14} < a_{41} < 10^{15}$ であるから、 a_{41} は 15 桁である。

(5)①

$0 < a < 1$ において

$$a - a^2 = a(1 - a) > 0$$

が成り立つから、 $0 < a^2 < a < 1$ が成り立つ。したがって、領域 S は下図の斜線部分になる。

上図より、領域 S の面積は

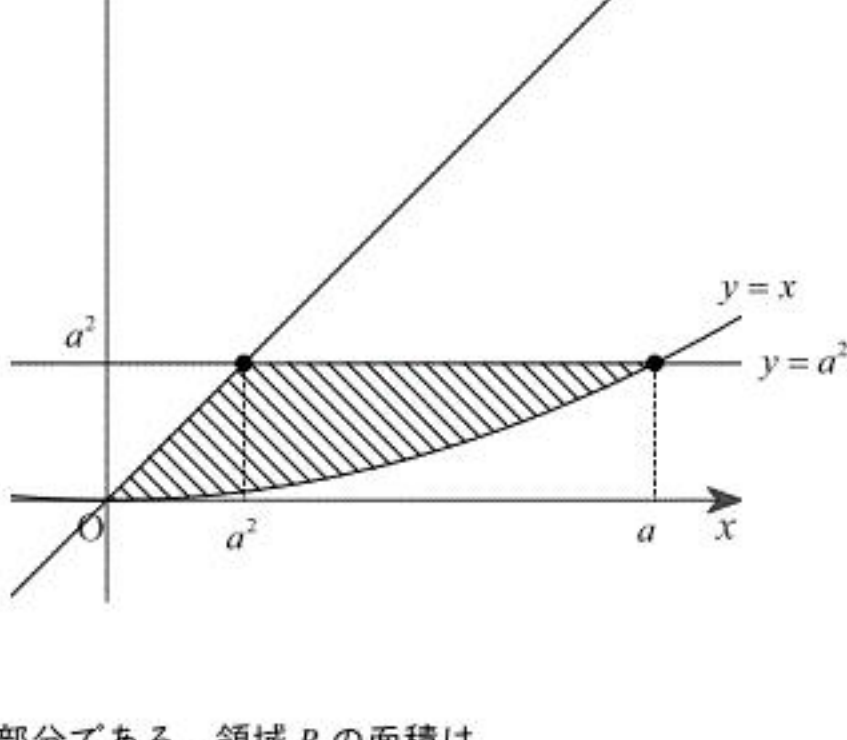
$$\frac{1}{2} (a - a^2)^2 = \frac{1}{2} a^2 (1 - a)^2$$

と求められる。よって $a = \frac{1}{2}$ のとき、領域 S の面積は

$$\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^2 = \frac{1}{32}$$

である。

②



領域 R は上図の斜線部分である。領域 R の面積は

$$\int_0^a (a^2 - x^2) dx - \frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot a^2 = \left[a^2 x - \frac{1}{3} x^3 \right]_0^a - \frac{1}{2} a^4$$

$$= \frac{2}{3} a^3 - \frac{1}{2} a^4$$

と求められる。

③

①、②より、領域 R の面積と領域 S の面積が等しくなるのは

$$\frac{2}{3} a^3 - \frac{1}{2} a^4 = \frac{1}{2} a^2 (1 - a)^2$$

$$\Leftrightarrow a^4 - \frac{5}{3} a^3 + \frac{1}{2} a^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 (6a^2 - 10a + 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow a = 0, \frac{5 \pm \sqrt{7}}{6}$$

である。 $0 < a < 1$ より、求める a の値は $a = \frac{5 - \sqrt{7}}{6}$ である。

〔Ⅱ〕

(1)

関数 $y = x^3 - x^2$ について、 $y' = 3x^2 - 2x$ より曲線 C 上の点 $(t, t^3 - t^2)$ における接線の方程式は

$$\begin{aligned} y &= (3t^2 - 2t)(x - t) + t^3 - t^2 \\ \Leftrightarrow y &= (3t^2 - 2t)x - 2t^3 + t^2 \end{aligned}$$

である。これを $y = px + q$ と比較して、 $p = 3t^2 - 2t$, $q = -2t^3 + t^2$ となる。

$$(\text{答}) \quad p = 3t^2 - 2t, \quad q = -2t^3 + t^2$$

(2)

$f(t) = -2t^3 + t^2$ より、 $f'(t) = -6t^2 + 2t = -6t\left(t - \frac{1}{3}\right)$ である。よって、増減表は以下のようになる。

t	...	0	...	$\frac{1}{3}$	...
$f'(t)$	-	0	+	0	-
$f(t)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{27}$	$\searrow$

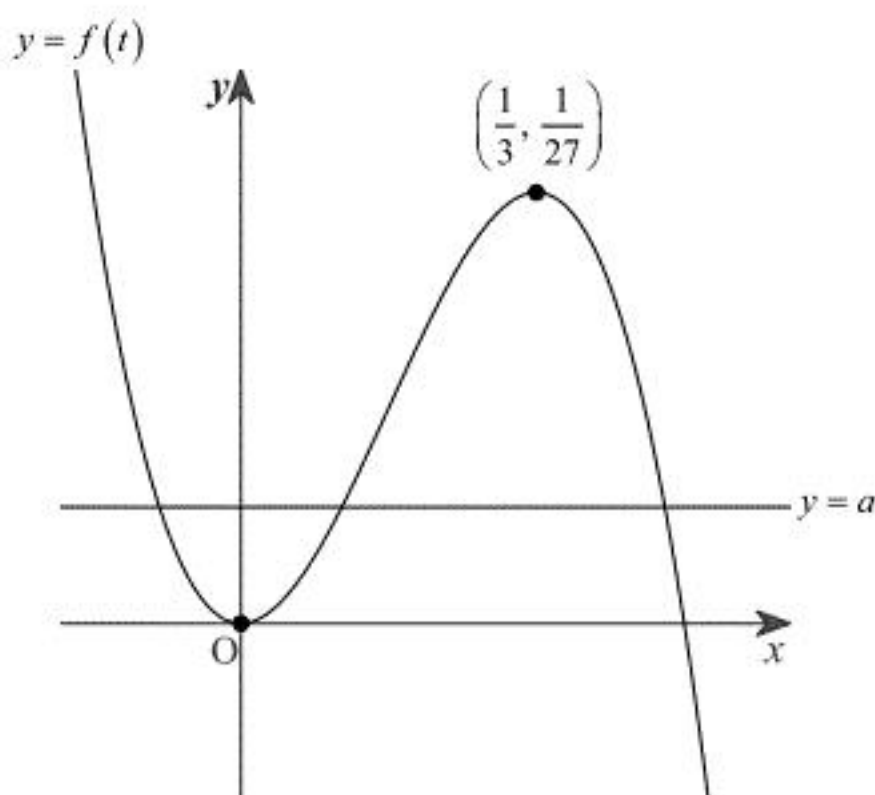
(答) 前表

(3)

接線が点 $(0, a)$ を通ることから、(1)より

$$a = -2t^3 + t^2 \quad \cdots \textcircled{1}$$

が成り立つ。少なくとも1本の接線に対して接点の x 座標が正となるのは、 $\textcircled{1}$ を t の3次方程式とみたとき、 $\textcircled{1}$ が少なくとも1つの正の実数解を持つときである。よって、直線 $y = a$ と関数 $y = f(t)$ のグラフが $t > 0$ の範囲に少なくとも1つの共有点を持てばよい。



上のグラフから、条件を満たす a の範囲は $a \leq \frac{1}{27}$ である。

$$(\text{答}) \quad a \leq \frac{1}{27}$$