

〔 I 〕

〔解答〕

(1)	1	
	H	
(2)	2	3
	C	C

〔解説〕

(1)

$|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{3}$ の両辺を 2 乗すると,

$$\begin{aligned} |\vec{a}-\vec{b}|^2 &= 3 \\ \Leftrightarrow |\vec{a}|^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{b}|^2 &= 3 \\ \Leftrightarrow 4 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} + 9 &= 3 \quad (\because |\vec{a}|=2, |\vec{b}|=3) \\ \Leftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} &= 5 \end{aligned}$$

となる。

(2)

$\vec{a}+t\vec{b}$ と $\vec{b}$ が垂直となるとき,

$$\begin{aligned} (\vec{a}+t\vec{b})\cdot\vec{b} &= 0 \\ \Leftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} + t|\vec{b}|^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow 5 + 9t &= 0 \quad (\because \vec{a}\cdot\vec{b}=5, |\vec{b}|=3) \\ \Leftrightarrow t &= -\frac{5}{9} \end{aligned}$$

となる。また、 $|s\vec{a}-t\vec{b}|=|s\vec{a}+\frac{5}{9}\vec{b}|$ が最小となるのは、 $|s\vec{a}+\frac{5}{9}\vec{b}|$ が最小となるときであり、

$$\begin{aligned} \left|s\vec{a}+\frac{5}{9}\vec{b}\right|^2 &= s^2|\vec{a}|^2 + \frac{10}{9}s\vec{a}\cdot\vec{b} + \frac{25}{81}|\vec{b}|^2 \\ &= 4s^2 + \frac{50}{9}s + \frac{25}{9} \quad (\because |\vec{a}|=2, |\vec{b}|=3, \vec{a}\cdot\vec{b}=5) \\ &= 4\left(s+\frac{25}{36}\right)^2 + \frac{275}{324} \end{aligned}$$

より、これが最小となる実数 s の値は $s=-\frac{25}{36}$ である。

〔Ⅱ〕

〔解答〕

101	12
-----	----

〔解説〕

真数条件より、

$$\begin{aligned}x-9 > 0 \text{ かつ } 15-x > 0 \\ \Leftrightarrow 9 < x < 15 \qquad \qquad \qquad \cdot \cdot \cdot \textcircled{1}\end{aligned}$$

である。このもとで、方程式を解くと、

$$\begin{aligned}\log_{\sqrt{3}}(x-9) - \log_3(15-x) - 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{\log_3(x-9)}{\log_3 \sqrt{3}} - \log_3(15-x) - 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow 2\log_3(x-9) &= \log_3(15-x) + 1 \\ \Leftrightarrow \log_3(x-9)^2 &= \log_3 3(15-x) \\ \Leftrightarrow (x-9)^2 &= 3(15-x) \\ \Leftrightarrow x^2 - 15x + 36 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-3)(x-12) &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= 12 \quad (\because \textcircled{1})\end{aligned}$$

となる。

〔Ⅲ〕

〔解答〕

(1)	$\boxed{4}$
	D
(2)	$\boxed{5}$
	F
(3)	$\boxed{6}$
	E

〔解説〕

(1)

まず千の位の数を1から9の中から選び、残った9個の数から3個選んで並べて百、十、一の位とする場合の数を考えて、

$$9 \cdot {}_9P_3 = 9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4536 \text{ (通り)}$$

となる。

(2)

まず千の位の数を1, 3, 5, 7, 9の中から選び、残った9個の数から3個選んで並べて百、十、一の位とする場合の数を考えて、

$$5 \cdot {}_9P_3 = 5 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 2520 \text{ (通り)}$$

となる。

(3)

一の位が0または5となる場合の数を考えればよい。一の位が0となる場合、残った9個の数から3個選んで並べて千、百、十の位とする場合の数を考えて、

$${}_9P_3 = 9 \cdot 8 \cdot 7 = 504 \text{ (通り)}$$

となる。一の位が5となる場合は、千の位を0, 5以外の8個の数から選び、残った8個の数から2個選んで並べて百、十の位とする場合の数を考えて

$$8 \cdot {}_8P_2 = 8 \cdot 8 \cdot 7 = 448 \text{ (通り)}$$

となる。以上より、5の倍数となる場合は合わせて

$$504 + 448 = 952 \text{ (通り)}$$

である。

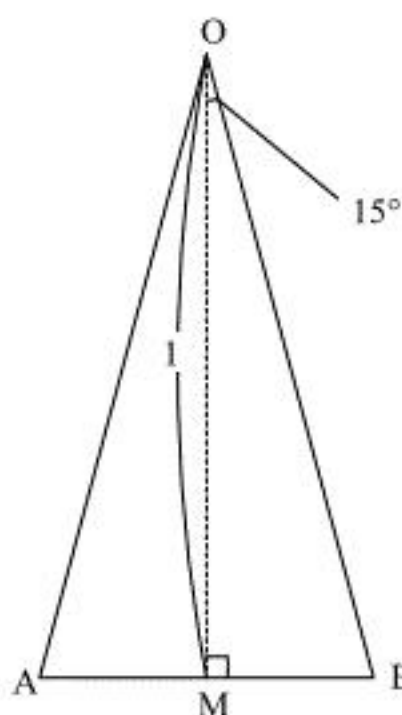
〔Ⅳ〕

〔解答〕

7
B

〔解説〕

題意の正十二角形は、半径1の円に外接し、下図の二等辺三角形を12個合わせたものである。図のように各点を定める。



$\triangle OAB$ は二等辺三角形であるため、辺 AB の中点を M とすると、 $OM \perp AB$ である。また、線分 OM は $\angle AOB$ を二等分する。よって、加法定理を用いると、

$$\begin{aligned}
 AM &= OM \tan 15^\circ \\
 &= \tan 15^\circ \quad (\because OM = 1) \\
 &= \tan (45^\circ - 30^\circ) \\
 &= \frac{\tan 45^\circ - \tan 30^\circ}{1 + \tan 45^\circ \tan 30^\circ} \\
 &= \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}} \\
 &= \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1} \\
 &= \frac{(\sqrt{3} - 1)^2}{2} \\
 &= 2 - \sqrt{3}
 \end{aligned}$$

となる。したがって、求める正十二角形の面積は、

$$\begin{aligned}
 12\triangle OAB &= 12 \cdot \frac{1}{2} \cdot OM \cdot 2AM \\
 &= 12 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2(2 - \sqrt{3}) \\
 &= 12(2 - \sqrt{3})
 \end{aligned}$$

となる。

〔V〕

〔解答〕

(1)	8	9
	B	H
(2)	10	11
	C	H
(3)	12	
	G	

〔解説〕

(1)

曲線 $y = -x^2 + ax$ が直線 $y = -x + 4$ と接するとき、2 次方程式

$$\begin{aligned} -x^2 + ax &= -x + 4 \\ \Leftrightarrow x^2 - (a+1)x + 4 &= 0 \end{aligned}$$

は重解をもつ。よって、この 2 次方程式の判別式は 0 となる。したがって、

$$\begin{aligned} (a+1)^2 - 4 \cdot 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow (a+5)(a-3) &= 0 \\ \Leftrightarrow a &= -5, 3 \end{aligned}$$

となる。 $a_1 < a_2$ より、 $a_1 = -5, a_2 = 3$ となる。

(2)

(1)より、 $C_1: y = -x^2 - 5x$, $C_2: y = -x^2 + 3x$ である。 C_1 と $\ell: y = -x + 4$ の接点の x 座標は、

$$\begin{aligned} -x^2 - 5x &= -x + 4 \\ \Leftrightarrow (x+2)^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= -2 \end{aligned}$$

であり、同様にして、 C_2 と ℓ の接点の x 座標は、

$$\begin{aligned} -x^2 + 3x &= -x + 4 \\ \Leftrightarrow (x-2)^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= 2 \end{aligned}$$

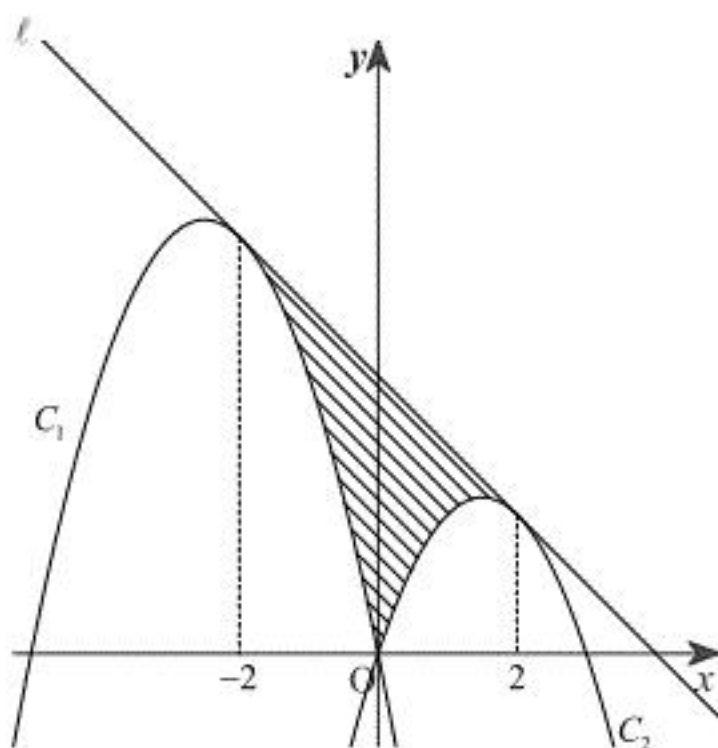
となる。

(3)

C_1 と C_2 の共有点の x 座標は、

$$\begin{aligned} -x^2 - 5x &= -x^2 + 3x \\ \Leftrightarrow x &= 0 \end{aligned}$$

である。よって C_1, C_2, ℓ のグラフを描くと以下の図のようになる。



よって、求める面積は、

$$\begin{aligned} &\int_{-2}^0 \{(-x+4) - (-x^2-5x)\} dx + \int_0^2 \{(-x+4) - (-x^2+3x)\} dx \\ &= \int_{-2}^0 (x+2)^2 dx + \int_0^2 (x-2)^2 dx \\ &= \int_{-2}^0 (x^2+4x+4) dx + \int_0^2 (x^2-4x+4) dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3} + 2x^2 + 4x \right]_{-2}^0 + \left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x \right]_0^2 \\ &= \frac{16}{3} \end{aligned}$$

となる。

〔Ⅵ〕

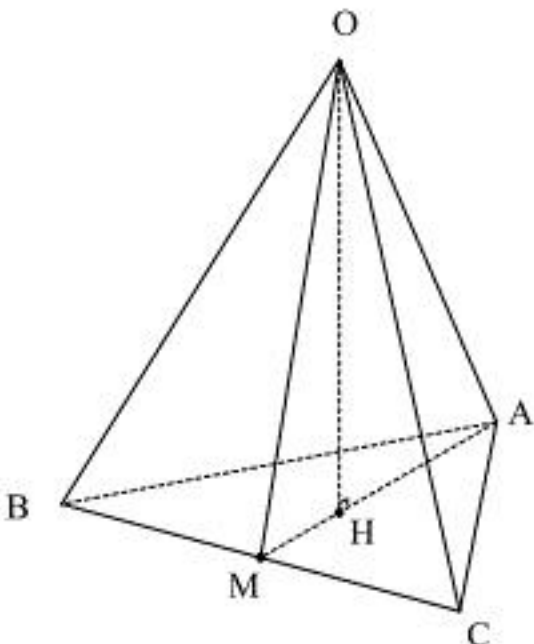
〔解答〕

(1)	13
	D
(2)	14
	G
(3)	102
	$\frac{2\sqrt{33}}{11}$

〔解説〕

(1)

四面体 OABC を描くと以下の図のようになる。



辺 BC の中点を M とすると、 $AM \perp BC$ である。三角形 ABM に三平方の定理を用いて、

$$\begin{aligned} AM &= \sqrt{AB^2 - BM^2} \\ &= \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

となる。ここで、点 H は頂点 O から三角形 ABC に下した垂線の足であるので、 $OH \perp HA$, $OH \perp HB$, $OH \perp HC$ となる。これより三角形 OAH, 三角形 OBH, 三角形 OCH に三平方の定理を用いると、

$$\begin{aligned} OH^2 + HA^2 &= OA^2 \\ OH^2 + HB^2 &= OB^2 \\ OH^2 + HC^2 &= OC^2 \end{aligned}$$

となる。これと $OA = OB = OC$ より、

$$HA = HB = HC$$

となる。したがって、H は三角形 ABC の外心である。ここで三角形 ABC は正三角形であるので、その外心と重心は一致する。したがって H は三角形 ABC の重心であるから、線分 AM を 2:1 に内分する。よって、

$$AH = \frac{2}{3}AM = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

となる。

(2)

三角形 OAH に三平方の定理を用いて、

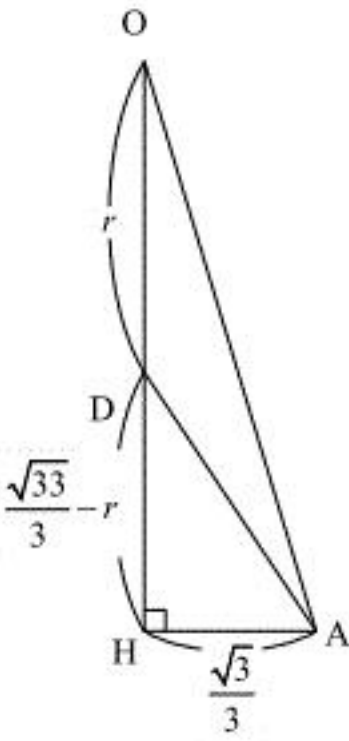
$$\begin{aligned} OH &= \sqrt{OA^2 - AH^2} \\ &= \sqrt{2^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} \\ &= \frac{\sqrt{33}}{3} \end{aligned}$$

となる。

(3)

図形の対称性より、四面体 OABC の 4 つの頂点を通る球の中心は、線分 OH 上にある。この

球の中心を D とすると、 $OD = AD = r$, $DH = \frac{\sqrt{33}}{3} - r$ となる。



よって、三角形 ADH に三平方の定理を用いて、

$$\begin{aligned} AH^2 + DH^2 &= AD^2 \\ \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{33}}{3} - r\right)^2 &= r^2 \\ \Leftrightarrow r^2 - \frac{2\sqrt{33}}{3}r + 4 &= r^2 \\ \Leftrightarrow r &= \frac{2\sqrt{33}}{11} \end{aligned}$$

となる。

〔Ⅶ〕

〔解答〕

(1)	15	
	E	
(2)	103	
	671	
(3)	16	17
	D	B

〔解説〕

(1)

上から n 段目には n 個の数字が並ぶことを踏まえると、 n が正の奇数のとき、上から n 段目の一番左の整数は、

$$1+2+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$$

である。

(2)

(1)と同様に考えると、 n が正の偶数のとき、上から n 段目にある整数のうち最大のもの、すなわち一番右の整数は $\frac{1}{2}n(n+1)$ である。いま、上から 10 段目、11 段目の最大の整数はそれ

ぞれ $\frac{1}{2}\cdot 10\cdot 11=55$ 、 $\frac{1}{2}\cdot 11\cdot 12=66$ であるから、上から 11 段目にある整数の和は、

$$56+57+\cdots+66=\frac{1}{2}\cdot 11\cdot (56+66)=671$$

である。

(3)

上から 62, 63 段目にある整数のうち最大のものはそれぞれ

$$\frac{1}{2}\cdot 62\cdot 63=1953, \frac{1}{2}\cdot 63\cdot 64=2016$$

である。したがって、2000 は上から 63 段目にあることがわかる。63 は奇数であるから、上から 63 段目、左から m 番目(ただし $1\leq m\leq 63$)にある数は

$$2016-m+1=2017-m$$

とおける。ここで、

$$2017-m=2000$$

$$\Leftrightarrow m=17$$

より、2000 は左から 17 番目にある。