

〔 I 〕

〔 解答 〕

1.	(1)	(2)
	F	D
2.	(3)	(4)
	B	E
3.	(5)	(6)
	Q	Q

〔 解説 〕

1.

$$\begin{aligned}
 m^2 &= n^2 + 8 \\
 \Leftrightarrow m^2 - n^2 &= 8 \\
 \therefore (m+n)(m-n) &= 8
 \end{aligned}$$

と変形できる。 $m+n, m-n$ は整数、 $m+n > m-n, m+n > 0$ より、

$$\begin{aligned}
 (m+n, m-n) &= (8, 1), (4, 2) \\
 \therefore (m, n) &= \left(\frac{9}{2}, \frac{7}{2}\right), (3, 1)
 \end{aligned}$$

となる。 m, n は自然数であるから、 $m=3, n=1$ が求める答えである。

2.

$x+y=a, xy=1$ であるとき、

$$\begin{aligned}
 x^3 + y^3 &= (x+y)^3 - 3xy(x+y) \\
 &= a^3 - 3 \cdot 1 \cdot a \\
 &= a^3 - 3a
 \end{aligned}$$

となる。ここで $f(a)=a^3-3a$ とおくと、

$$\begin{aligned}
 f'(a) &= 3a^2 - 3 \\
 &= 3(a+1)(a-1)
 \end{aligned}$$

であるから、 $-\sqrt{2} < a < \sqrt{2}$ における $f(a)$ の増減表は以下のようになる。

a	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	$\sqrt{2}$
$f'(a)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(a)$		$\nearrow$	2	$\searrow$		$\nearrow$	$-\sqrt{2}$

よって、 $f(a)$ が最大となるのは $a=-1$ のときで、その最大値は 2 である。

3.

$$\begin{aligned}
 A &= \{(1, 2), (1, 6), (2, 4), (3, 2), (3, 6), (4, 4), (5, 2), (5, 6), (6, 4)\} \\
 B &= \{(1, 2), (1, 5), (2, 1), (2, 4), (3, 3), (3, 6), (4, 2), (4, 5), (5, 1), (5, 4), (6, 3), (6, 6)\} \\
 A \cap B &= \{(1, 2), (2, 4), (3, 6)\}
 \end{aligned}$$

である。よって、

$$\begin{aligned}
 n(A \cup B) &= n(A) + n(B) - n(A \cap B) \\
 &= 9 + 12 - 3 \\
 &= 18
 \end{aligned}$$

となる。また、 $n(S)=6^2=36$ であるから、

$$\begin{aligned}
 n(\overline{A \cup B}) &= n(S) - n(A \cup B) \\
 &= 36 - 18 \\
 &= 18
 \end{aligned}$$

となる。

【Ⅱ】

【解答】

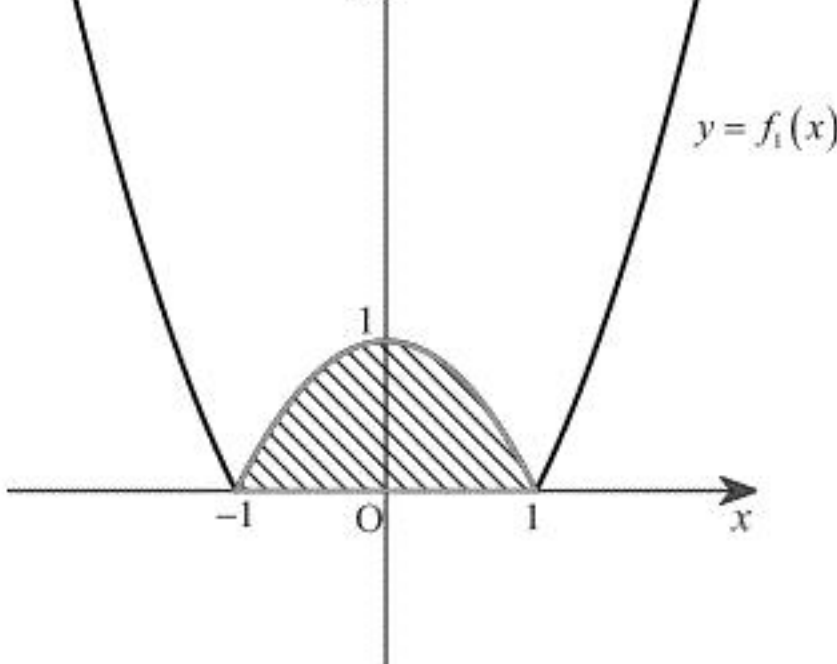
1.	ア	イ	ウ	エ	オ	カ
	4	3	8	8	2	3
2.	キ	ク				
	0	1				
3.	ケ	コ	サ	シ	ス	セ
	2	1	0	0	2	2
4.	ソ	タ	チ	ツ	テ	
	8	1	6	3	8	

【解説】

1.

$$\begin{aligned} f_1(x) &= |x^2-1| \\ &= \begin{cases} x^2-1 & (1 \leq |x|) \\ 1-x^2 & (|x| < 1) \end{cases} \end{aligned}$$

より、 $y=f_1(x)$ のグラフは以下の図のようになる。



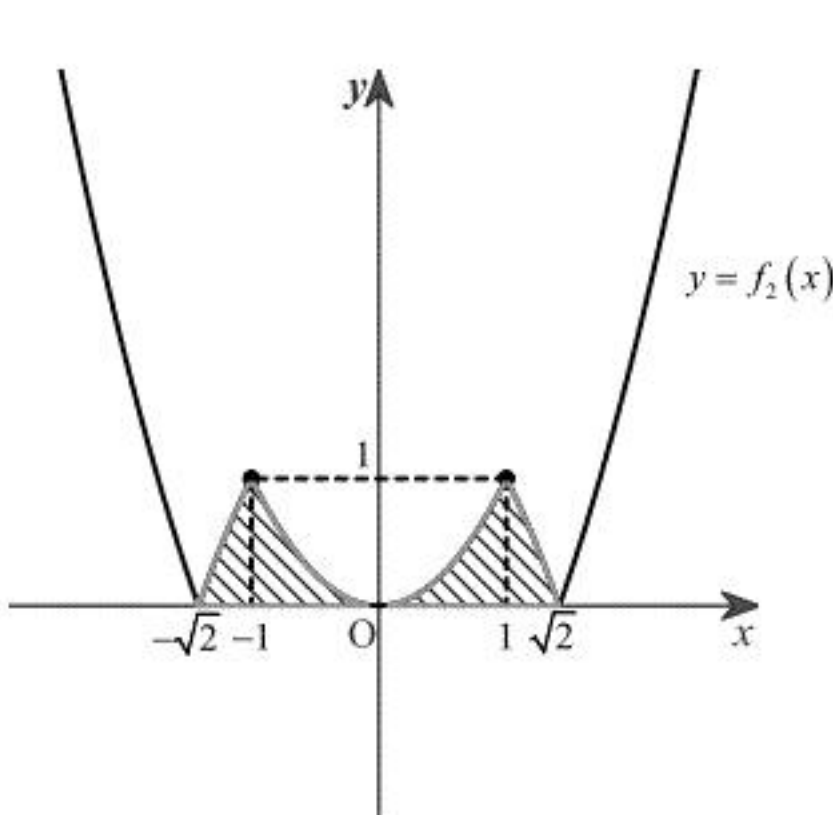
したがって、 S_1 は上図の斜線部分の面積であり、

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_{-1}^1 (1-x^2) dx \\ &= -\int_{-1}^1 (x+1)(x-1) dx \\ &= \frac{1}{6} \{1-(-1)\}^3 \\ &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

となる。また、

$$\begin{aligned} f_2(x) &= |f_1(x)-1| \\ &= \begin{cases} |x^2-2| & (1 \leq |x|) \\ |-x^2| & (|x| < 1) \end{cases} \\ &= \begin{cases} x^2-2 & (\sqrt{2} \leq |x|) \\ 2-x^2 & (1 \leq |x| < \sqrt{2}) \\ x^2 & (|x| < 1) \end{cases} \end{aligned}$$

より、 $y=f_2(x)$ のグラフは以下の図のようになる。



したがって、 S_2 は上図の斜線部分の面積である。この部分は y 軸に関して対称であるから、

$$\begin{aligned} \frac{S_2}{2} &= \int_0^1 x^2 dx + \int_1^{\sqrt{2}} (2-x^2) dx \\ &= \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^1 + \left[2x - \frac{1}{3} x^3 \right]_1^{\sqrt{2}} \\ &= \frac{-4+4\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

$$\therefore S_2 = \frac{-8+8\sqrt{2}}{3}$$

となる。

2.

$$f_n(a) = |f_{n-1}(a)-1|$$

$$\therefore m = |f_{n-1}(a)-1|$$

となり、 m は整数であるから $f_{n-1}(a)$ も整数である。ここで、 $f_n(x)$ ($n=0, 1, 2, 3, \dots$)の定め方よりすべての x に対して $f_n(x) \geq 0$ であるから、 $f_{n-1}(a) \geq 0$ である。よって、 $f_{n-1}(a) < 1$ すると $f_{n-1}(a) = 0$ となり、 $f_{n-1}(a) \neq 0$ と矛盾する。したがって、 $f_{n-1}(a) \geq 1$ であるから、

$$\begin{aligned} m &= f_{n-1}(a)-1 \\ \therefore f_{n-1}(a) &= m+1 \end{aligned}$$

となる。

3.

小問2の結果を用いると、

$$f_3(a) = 0+1=1$$

$$f_2(a) = 1+1=2$$

$$f_1(a) = 2+1=3$$

$$f_0(a) = 3+1=4$$

となるから、 $a^2=4$ より $a=\pm 2$ である。また、 $f_n(x)=0$ ならば

$$f_{n+1}(x) = |0-1|=1$$

$$f_{n+2}(x) = |1-1|=0$$

となるから、このことを利用して $f_4(x)=0$ を満たす x に対して場合分けする。

[1] $f_k(x) \neq 0$ ($k=0, 1, 2, 3$) のとき

$x=\pm 2$ である。

[2] $f_{2k}(x)=0$ ($k=0, 1$) のとき

$f_{2k+2}(x)=0$, $f_{2k+4}(x)=0$ となり、確かに $f_4(x)=0$ を満たす。このとき、 $f_0(x)=0$ の解は、 $x^2=0$ より $x=0$ である。また、小問2より $f_2(x)=0$ の解は、 $x=0, \pm\sqrt{2}$ となる。

[3] $f_{2k+1}(x)=0$ ($k=0, 1$) のとき

$f_{2k+2}(x)=1$, $f_{2k+4}(x)=1$ となるため、 $f_4(x)=0$ を満たさない。

以上、[1], [2], [3]より、 $f_4(x)=0$ のすべての解は $x=0, \pm\sqrt{2}, \pm 2$ であるから、 $|x|$ を大きさに順に並べると、

$$|x|=0, \sqrt{2}, 2$$

となる。

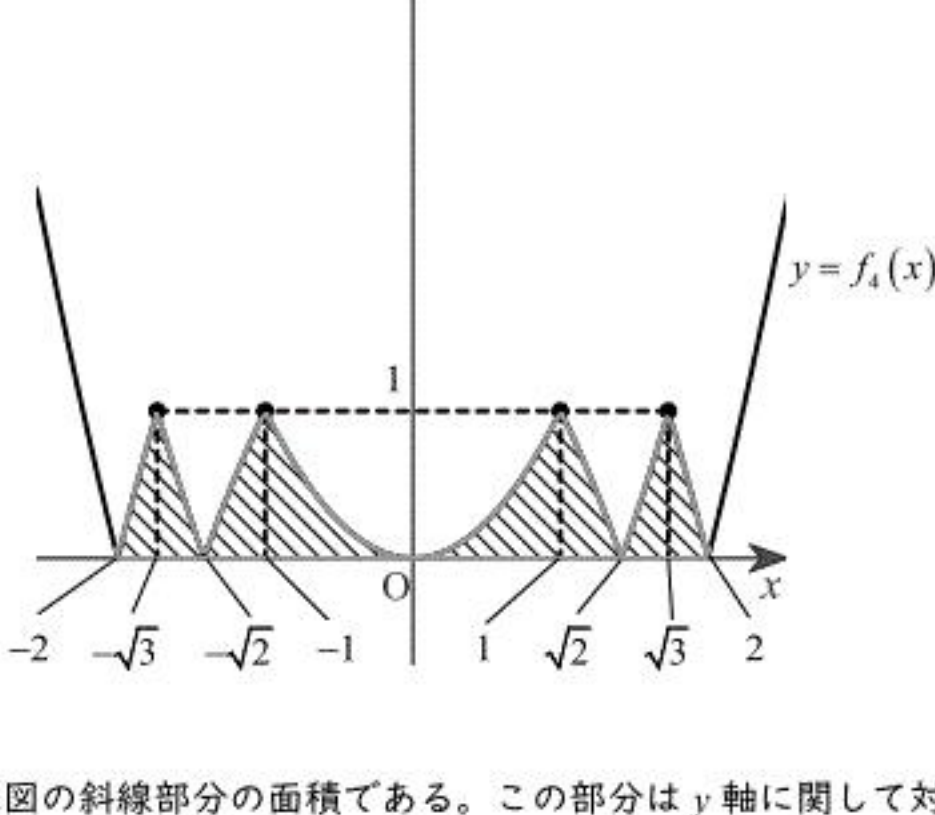
4.

$$\begin{aligned} f_3(x) &= |f_2(x)-1| \\ &= \begin{cases} |x^2-3| & (\sqrt{2} \leq |x|) \\ |1-x^2| & (1 \leq |x| < \sqrt{2}) \\ |x^2-1| & (|x| < 1) \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \begin{cases} x^2-3 & (\sqrt{3} \leq |x|) \\ 3-x^2 & (\sqrt{2} \leq |x| < \sqrt{3}) \\ x^2-1 & (1 \leq |x| < \sqrt{2}) \\ 1-x^2 & (|x| < 1) \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_4(x) &= |f_3(x)-1| \\ &= \begin{cases} |x^2-4| & (\sqrt{3} \leq |x|) \\ |2-x^2| & (\sqrt{2} \leq |x| < \sqrt{3}) \\ |x^2-2| & (1 \leq |x| < \sqrt{2}) \\ |-x^2| & (|x| < 1) \end{cases} \\ &= \begin{cases} 4-x^2 & (2 \leq |x|) \\ x^2-4 & (\sqrt{3} \leq |x| < 2) \\ x^2-2 & (\sqrt{2} \leq |x| < \sqrt{3}) \\ 2-x^2 & (1 \leq |x| < \sqrt{2}) \\ x^2 & (|x| < 1) \end{cases} \end{aligned}$$

となるから、 $y=f_4(x)$ のグラフは以下の図のようになる。



したがって、 S_4 は上図の斜線部分の面積である。この部分は y 軸に関して対称であるから、

$$\begin{aligned} \frac{S_4}{2} &= \int_0^1 x^2 dx + \int_1^{\sqrt{2}} (2-x^2) dx + \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} (x^2-2) dx + \int_{\sqrt{3}}^2 (4-x^2) dx \\ &= \frac{S_2}{2} + \left[\frac{x^3}{3} - 2x \right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} + \left[4x - \frac{1}{3} x^3 \right]_{\sqrt{3}}^2 \\ &= \left(-\frac{4}{3} + \frac{4}{3} \sqrt{2} \right) + \left(-\sqrt{3} + \frac{4}{3} \sqrt{2} \right) + \left(\frac{16}{3} - 3\sqrt{3} \right) \\ &= 4 + \frac{8}{3} \sqrt{2} - 4\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\therefore S_4 = 8 + \frac{16\sqrt{2}}{3} - 8\sqrt{3}$$

となる。

〔Ⅲ〕

1.

条件より、 $P_1, P_2, \dots, P_n$ は反時計回りにこの順で並び、

$$\angle P_1OP_2 = \angle P_2OP_3 = \dots = \angle P_{n-1}OP_n = \angle P_nOP_1$$

である。また、二等辺三角形 P_2OP_3 に対して余弦定理を用いると、

$$\begin{aligned}\cos \angle P_2OP_3 &= \frac{OP_2^2 + OP_3^2 - P_2P_3^2}{2 \cdot OP_2 \cdot OP_3} \\ &= \frac{1+1-r^2}{2 \cdot 1 \cdot 1} \\ &= 1 - \frac{r^2}{2}\end{aligned}$$

となる。よって、 $r = \sqrt{2}$ のとき $\cos \angle P_2OP_3 = 0$ より $\angle P_2OP_3 = \frac{\pi}{2}$ ととれて、

$P_1(1, 0), P_2(0, 1), P_3(-1, 0), P_4(0, -1)$ より $n=4$ である。 $r = \sqrt{3}$ のとき $\cos \angle P_2OP_3 = -\frac{1}{2}$ より

$\angle P_2OP_3 = \frac{2\pi}{3}$ ととれて、 $P_2(1, 0), P_2\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), P_3\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ より $n=3$ である。

$$(\text{答}) \quad r = \sqrt{2} \text{ のとき } n=4, \angle P_2OP_3 = \frac{\pi}{2}, \quad r = \sqrt{3} \text{ のとき } n=3, \angle P_2OP_3 = \frac{2\pi}{3}$$

2.

$1 \leq i \leq n$ について、 $\angle P_iOP_{i+1}$ はすべて同じであるから、

$$\begin{aligned}\angle P_iP_{i+1}P_{i+2} &= \angle P_iP_{i+1}O + \angle OP_{i+1}P_{i+2} \\ &= \frac{\pi - \angle P_iOP_{i+1}}{2} + \frac{\pi - \angle P_{i+1}OP_{i+2}}{2} \\ &= \pi - \angle P_iOP_{i+1}\end{aligned}$$

より、 $\angle P_iP_{i+1}P_{i+2}$ もすべて同じである。

(証明終)

3.

$\angle P_1OP_2 = \angle P_2OP_3 = \dots = \angle P_5OP_1 = \theta$ ($0 < \theta < \pi$) とする。 $P_1, P_2, \dots, P_5, P_1$ は反時計回りにこの順に並び、最後に P_1 に戻っているから、自然数 m を用いて

$$\begin{aligned}\angle P_1OP_2 + \angle P_2OP_3 + \dots + \angle P_5OP_1 &= 2m\pi \\ \Leftrightarrow 5\theta &= 2m\pi \\ \therefore \theta &= \frac{2m\pi}{5}\end{aligned}$$

と表せる。ここで、 $0 < \theta < \pi$ より、

$$\begin{aligned}0 < \frac{2m\pi}{5} < \pi \\ \therefore m &= 1, 2\end{aligned}$$

となるから、

$$\begin{aligned}\angle P_1P_2P_3 + \angle P_2P_3P_4 + \angle P_3P_4P_5 + \angle P_4P_5P_1 + \angle P_5P_1P_2 &= 5\angle P_1P_2P_3 \\ &= 5(\pi - \theta) \\ &= 5\pi - 2m\pi \\ &= \pi, 3\pi\end{aligned}$$

となる。

(答) $\pi, 3\pi$

4.

問題不備により解答なし。