

【I】

〔解答〕

ア	イ			
8	5			
ウ				
7				
エ	オ			
2	7			
カ	キ	ク	ケ	
3	2	4	2	
コ	サ	シ	ス	セ
2	7	5	8	5
ソ	タ			
8	5			

〔解説〕

(1)

$$\begin{aligned}\frac{1}{p}+\frac{1}{q}&=\frac{1}{4} \\ \Leftrightarrow 4q+4p&=pq \\ \Leftrightarrow pq-4p-4q&=0 \\ \therefore (p-4)(q-4)&=16\end{aligned}$$

である。 $p-4, q-4$ は整数であり、 $1\leq p\leq q$ より $-3\leq p-4\leq q-4$ であるため、

$$(p-4, q-4)=(1, 16), (2, 8), (4, 4)$$

を得る。したがって、

$$(p, q)=(5, 20), (6, 12), (8, 8)$$

となる。以上より、 p の最大値は8、また p の最小値は5である。

(2)

$x>0$ において $f(x)>0$ であるので、

$$\begin{aligned}\log f(x)&=g(x)\log x \\ &=\frac{1}{x^2}\log x\end{aligned}$$

となる。両辺を x で微分すると

$$\begin{aligned}\frac{f'(x)}{f(x)}&=\frac{\frac{1}{x}\cdot x^2-2x\log x}{x^4} \\ &=\frac{1-2\log x}{x^3}\end{aligned}$$

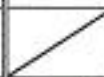
である。よって、

$$f'(x)=\frac{1-2\log x}{x^3}x^{\frac{1}{x^2}}$$

を得る。 $f'(x)=0$ とすると

$$\begin{aligned}1-2\log x&=0 \\ \Leftrightarrow \log x&=\frac{1}{2} \\ \therefore x&=\sqrt{e}\end{aligned}$$

となる。よって、 $x>0$ における $f(x)$ の増減は以下のようになる。

x	0	...	$\sqrt{e}$	...
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$			極大値	

したがって、 $f(x)$ は $x=\sqrt{e}$ で最大値をとる。

(3)

複素数 z が $|z|=1$ を満たすとき、 $0\leq \theta<2\pi$ である θ を用いて

$$z=\cos\theta+i\sin\theta$$

と表される。このとき、

$$\begin{aligned}\left|z^2-z+2\right|^2&=\left|(\cos 2\theta-\cos \theta+2)+i(\sin 2\theta-\sin \theta)\right|^2 \\ &=(\cos 2\theta-\cos \theta+2)^2+(\sin 2\theta-\sin \theta)^2 \\ &=\cos ^2 2 \theta+2 \cos 2 \theta(-\cos \theta+2)+(-\cos \theta+2)^2+\sin ^2 2 \theta-2 \sin 2 \theta \sin \theta+\sin ^2 \theta \\ &=2 \cos 2 \theta(-\cos \theta+2)-4 \cos \theta-2 \sin 2 \theta \sin \theta+6 \\ &=-2(\cos 2 \theta \cos \theta+\sin 2 \theta \sin \theta)+4(\cos 2 \theta-\cos \theta)+6 \\ &=-2 \cos (2 \theta-\theta)+4\left(2 \cos ^2 \theta-\cos \theta-1\right)+6 \\ &=8 \cos ^2 \theta-6 \cos \theta+2 \\ &=8\left(\cos ^2 \theta-\frac{3}{4} \cos \theta\right)+2 \\ &=8\left\{\left(\cos \theta-\frac{3}{8}\right)^2-\frac{9}{64}\right\}+2 \\ &=8\left(\cos \theta-\frac{3}{8}\right)^2+\frac{7}{8}\end{aligned}$$

$$\therefore\left|z^2-2 z+2\right|=\sqrt{8\left(\cos \theta-\frac{3}{8}\right)^2+\frac{7}{8}}\left(\because\left|z^2-2 z+2\right| \geq 0\right)$$

となる。 $-1\leq \cos\theta\leq 1$ より $\left|z^2-z+2\right|$ は $\cos\theta=-1$ のとき、最大値4をとる。また、 $\cos\theta=\frac{3}{8}$

のとき、最小値 $\sqrt{\frac{7}{8}}$ 、つまり $\frac{\sqrt{14}}{4}$ をとる。

(4)

点Pの座標は、

$$(3\cos\theta, 3\sin\theta)$$

と表される。点Qは線分PAを1:2に内分する点であるので、点Qの座標は

$$\left(\frac{2}{3}\cdot 3\cos\theta+\frac{1}{3}\cdot 9, \frac{2}{3}\cdot 3\sin\theta+\frac{1}{3}\cdot 12\right)=(3+2\cos\theta, 4+2\sin\theta)$$

である。点Rの座標は、

$$\left(\frac{1}{2}\cdot 3\cos\theta+\frac{1}{2}\cdot 12, \frac{1}{2}\cdot 3\sin\theta+\frac{1}{2}\cdot 2\right)=\left(6+\frac{3}{2}\cos\theta, 1+\frac{3}{2}\sin\theta\right)$$

となる。よって、点Sの座標は、

$$\begin{aligned}&\left(\frac{1}{5}\cdot (3+2\cos\theta)+\frac{4}{5}\cdot \left(6+\frac{3}{2}\cos\theta\right), \frac{1}{5}\cdot (4+2\sin\theta)+\frac{4}{5}\cdot \left(1+\frac{3}{2}\sin\theta\right)\right) \\ &=\left(\frac{27}{5}+\frac{8}{5}\cos\theta, \frac{8}{5}+\frac{8}{5}\sin\theta\right)\end{aligned}$$

である。 $X=\frac{27}{5}+\frac{8}{5}\cos\theta, Y=\frac{8}{5}+\frac{8}{5}\sin\theta$ とすると、

$$\begin{cases}\cos\theta=\frac{5}{8}X-\frac{27}{8} \\ \sin\theta=\frac{5}{8}Y-1\end{cases}$$

を得る。よって、

$$\begin{aligned}\cos^2\theta+\sin^2\theta&=1 \\ \Leftrightarrow \left(\frac{5}{8}X-\frac{27}{8}\right)^2+\left(\frac{5}{8}Y-1\right)^2&=1 \\ \therefore \left(X-\frac{27}{5}\right)^2+\left(Y-\frac{8}{5}\right)^2&=\left(\frac{8}{5}\right)^2\end{aligned}$$

となる。以上より、Pが円Cの上を動くとき、Sの軌跡は、中心 $\left(\frac{27}{5}, \frac{8}{5}\right)$ 、半径 $\frac{8}{5}$ の円である。

〔Ⅱ〕

〔解答〕

あ
$x_1 + x_2 + x_3$
い
$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1$
う
$x_1x_2x_3$
え
$a^2 - 2b$
お
$a^3 - 3ab + 3c$
か
$b^3 + 3c^2 - 3abc$

〔解説〕

解と係数の関係より

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = a \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = b \\ x_1x_2x_3 = c \end{cases}$$

である。また、 $k = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ を a, b, c で表すと、

$$\begin{aligned} k &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \\ &= (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) \\ &= a^2 - 2b \end{aligned}$$

である。解と係数の関係より

$$\begin{cases} x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = A \\ x_1^3x_2^3 + x_2^3x_3^3 + x_3^3x_1^3 = B \\ x_1^3x_2^3x_3^3 = C \end{cases}$$

を得る。よって、

$$\begin{aligned} A &= x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 \\ &= (x_1 + x_2 + x_3)(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 - x_2x_3 - x_3x_1) + 3x_1x_2x_3 \\ &= a(a^2 - 2b - b) + 3c \\ &= a^3 - 3ab + 3c \end{aligned}$$

となる。また、

$$\begin{aligned} B &= x_1^3x_2^3 + x_2^3x_3^3 + x_3^3x_1^3 \\ &= (x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)\{(x_1^2x_2^2 + x_2^2x_3^2 + x_3^2x_1^2) - x_1x_2x_3(x_1 + x_2 + x_3)\} + 3x_1^2x_2^2x_3^2 \\ &= (x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)\{(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)^2 - 3x_1x_2x_3(x_1 + x_2 + x_3)\} + 3x_1^2x_2^2x_3^2 \\ &= b(b^2 - 3ca) + 3c^2 \\ &= b^3 + 3c^2 - 3abc \end{aligned}$$

である。

〔Ⅲ〕

(1)

$n \geq 2$ として進める。1回目の操作で番号1のカードをとり出す確率は、

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{2n}$$

である。また、2回目の操作で番号1のカードをとり出す確率は、1回目にコインの裏が出てカードをとり出さない場合と、1回目にコインの表が出て1以外のカードをとり出す場合を考えると、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n} \right) + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{n-1}{n} \right) \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n-1} \right) &= \frac{1}{4n} + \frac{1}{4n} \\ &= \frac{1}{2n} \end{aligned}$$

となる。以上より、上記の2つの事象は互いに排反であるため、2回目の操作が終わったとき、番号1のカードが手元にある確率は、

$$\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} = \frac{1}{n}$$

である。

(答) $\frac{1}{n}$

(2)

手元に i 枚のカードがあるとき、番号のパターンは ${}_n C_i$ 通りであり、これらは同様に確からしい。このうち番号1のカードが手元にあるパターンは ${}_{n-1} C_{i-1}$ 通りであるから、番号1のカードが手元にある確率は、

$$\frac{{}_{n-1} C_{i-1}}{{}_n C_i} = \frac{i}{n}$$

である。

(答) $\frac{i}{n}$

(3)

n 回目の操作が終わったとき、手元に i 枚のカードがあるのは、コインの表が i 回出ている場合であるから、その確率は、

$$\left(\frac{1}{2} \right)^i \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{n-i} \cdot {}_n C_i = {}_n C_i \left(\frac{1}{2} \right)^n$$

である。よって、 n 回目の操作が終わったとき、番号1のカードが手元にある確率は、

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n {}_n C_i \left(\frac{1}{2} \right)^n \cdot \frac{{}_{n-1} C_{i-1}}{{}_n C_i} &= \left(\frac{1}{2} \right)^n \sum_{i=1}^n {}_{n-1} C_{i-1} \\ &= \left(\frac{1}{2} \right)^n \sum_{i=0}^{n-1} {}_{n-1} C_i \\ &= \left(\frac{1}{2} \right)^n (1+1)^{n-1} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{1}{2}$

(4)

手元に i 枚のカードがあり、番号1から番号 j までのカードがすべて手元にある場合の番号のパターンは、 ${}_{n-j} C_{i-j}$ 通りである。よって、手元に i 枚のカードがあるとき、番号1から番号 j までのカードすべてが手元にある確率は、

$$\frac{{}_{n-j} C_{i-j}}{{}_n C_i}$$

となる。

(答) $\frac{{}_{n-j} C_{i-j}}{{}_n C_i}$

(5)

n 回目の操作が終わったとき、手元に i 枚のカードがある確率は、 ${}_n C_i \left(\frac{1}{2} \right)^n$ である。よって、

n 回目の操作が終わったとき、番号1から番号 j までのカードすべてが手元にある確率は、

$$\begin{aligned} \sum_{i=j}^n {}_n C_i \left(\frac{1}{2} \right)^n \cdot \frac{{}_{n-j} C_{i-j}}{{}_n C_i} &= \left(\frac{1}{2} \right)^n \sum_{i=j}^n {}_{n-j} C_{i-j} \\ &= \left(\frac{1}{2} \right)^n \sum_{i=0}^{n-j} {}_{n-j} C_i \\ &= \left(\frac{1}{2} \right)^n (1+1)^{n-j} \\ &= \left(\frac{1}{2} \right)^j \end{aligned}$$

となる。

(答) $\left(\frac{1}{2} \right)^j$

〔Ⅳ〕

(1)

$$\begin{aligned}x_n^2 + y_n^2 - z_n^2 &= (x_n - z_n)(x_n + z_n) + y_n^2 \\&= -(4n^2 + 4n + 1) + (2n + 1)^2 \\&= 0\end{aligned}$$

である。

(答) 0

(2)

$$\begin{aligned}\sin \theta_n &= \frac{y_n}{\sqrt{x_n^2 + y_n^2}} \\&= \frac{y_n}{z_n} \left(\because x_n^2 + y_n^2 = z_n^2, z_n > 0 \right) \\&= \frac{2n+1}{2n^2 + 2n + 1}\end{aligned}$$

となる。

(答) $\sin \theta_n = \frac{2n+1}{2n^2 + 2n + 1}$

(3)

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\cos t} dt &= \int \frac{\cos t}{\cos^2 t} dt \\&= \int \frac{\cos t}{1 - \sin^2 t} dt \\&= \int \frac{\cos t}{(1 - \sin t)(1 + \sin t)} dt \\&= \int \frac{(\sin t)'}{2} \left(\frac{1}{1 - \sin t} + \frac{1}{1 + \sin t} \right) dt \\&= \frac{1}{2} (-\log|1 - \sin t| + \log|1 + \sin t|) + C \\&= \frac{1}{2} \log \left(\frac{1 + \sin t}{1 - \sin t} \right) + C \quad (\because -1 < \sin t < 1)\end{aligned}$$

である。ただし、 C は積分定数である。

(答) $\frac{1}{2} \log \left(\frac{1 + \sin t}{1 - \sin t} \right) + C$

(4)

$$\begin{aligned}x_n \cos t + y_n \sin t &= \sqrt{x_n^2 + y_n^2} \left(\frac{x_n}{\sqrt{x_n^2 + y_n^2}} \cos t + \frac{y_n}{\sqrt{x_n^2 + y_n^2}} \sin t \right) \\&= z_n (\cos \theta_n \cos t + \sin \theta_n \sin t) \\&= z_n \cos(t - \theta_n)\end{aligned}$$

である。よって、

$$\begin{aligned}a_n &= \int_0^{\theta_n} \frac{z_n}{x_n \cos t + y_n \sin t} dt \\&= \int_0^{\theta_n} \frac{1}{\cos(t - \theta_n)} dt \\&= \left[\frac{1}{2} \log \left\{ \frac{1 + \sin(t - \theta_n)}{1 - \sin(t - \theta_n)} \right\} \right]_0^{\theta_n} \\&= -\frac{1}{2} \log \left\{ \frac{1 + \sin(-\theta_n)}{1 - \sin(-\theta_n)} \right\} \\&= \frac{1}{2} \log \frac{1 + \sin \theta_n}{1 - \sin \theta_n}\end{aligned}$$

を得る。 $\sin \theta_n = \frac{2n+1}{2n^2 + 2n + 1}$ より、

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{1}{2} \log \frac{1 + \frac{2n+1}{2n^2 + 2n + 1}}{1 - \frac{2n+1}{2n^2 + 2n + 1}} \\&= \frac{1}{2} \log \frac{2n^2 + 4n + 2}{2n^2} \\&= \frac{1}{2} \log \frac{(n+1)^2}{n^2} \\&= \log \frac{n+1}{n}\end{aligned}$$

となる。したがって、

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} (na_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \log \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \\&= \log e \\&= 1\end{aligned}$$

である。

(答) $a_n = \log \frac{n+1}{n}, \lim_{n \rightarrow \infty} (na_n) = 1$