

2024 年度 明治大学

【全学部統一】

解答時間 60分

配点 100点

よ

国語、数学Ⅲ 問題

はじめに、これを読みなさい。

1. 解答を始めるよう合図があるまで、問題冊子は開かないこと。
2. この問題冊子には、「数学Ⅲ」と「国語」の問題がおさめられている。「数学Ⅲ」は表面から 10 ページ、「国語」は裏面から 20 ページである。必要な科目を選択して解答すること。なお、表紙の次の白紙 2 ページはメモ用紙として使用してもよい。
3. 解答用紙に印刷されている座席番号が正しいかどうか、受験票と照合すること。
4. 監督者の指示にしたがい、解答用紙の氏名欄に氏名を記入すること。
5. 解答用紙の「**解答科目マーク欄**」にマークし、「**解答科目名記入欄**」に**解答する科目名を記入**すること。マークされていない場合、または複数の科目にマークされている場合は、この時限の科目は採点対象外となる。
6. 解答は、すべて解答用紙の所定欄にマークすること。
7. 1 つの解答欄に 2 つ以上マークしないこと。
8. 解答は、必ず鉛筆またはシャープペンシル(いずれも HB・黒)で記入すること。
9. 訂正する場合は、消しゴムできれいに消し、消しくずを残さないこと。
10. 解答用紙は、絶対に汚したり折り曲げたりしないこと。
11. **解答用紙はすべて回収するので、持ち帰らず、必ず提出すること。**
12. 問題冊子は、必ず持ち帰ること。
13. 試験時間は、60 分である。
14. (数学Ⅲ) 分数形で解答する場合は、既約分数で答えること。
15. (数学Ⅲ) 根号を含む形で解答する場合は、根号の中に現れる自然数が最小となる形で答えること。
16. マーク記入例

良い例	悪い例
	

数学Ⅲ 問題

〔Ⅰ〕 次の空欄 ア に当てはまるものを指定された解答群の中から選び、解答用紙の所定の欄の番号をマークせよ。空欄 イ には、当てはまる 0 から 9 までの数字を解答用紙の所定の欄にマークせよ。ただし、 $\log$ は自然対数である。

(1) $\frac{d}{dx} \log(x + \sqrt{1+x^2}) =$ ア

(2) $\int_{-3}^3 \sqrt{x^2} dx =$ イ

アの解答群

① $\frac{1}{x} + \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}$

② $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

③ $\sqrt{1+x^2}$

④ $x + \sqrt{1+x^2}$

⑤ $x - \sqrt{1+x^2}$

⑥ $\frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}}$

⑦ $\log \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}}$

⑧ $\log \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

⑨ $\log \frac{\sqrt{1+x^2}}{x + \sqrt{1+x^2}}$

⑩ $\log \frac{x}{x + \sqrt{1+x^2}}$

(このページは計算用紙として使用してよい。)

〔Ⅱ〕 次の空欄に当てはまる 0 から 9 までの数字を解答用紙の所定の欄にマークせよ。

i は虚数単位とし、 $\omega = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$ とする。

投げたとき表と裏の出る確率がそれぞれ $\frac{1}{2}$ の硬貨を用意する。 $z_0 = 0$ とおき、この硬貨を 4 回投げて、複素数 z_1, z_2, z_3, z_4 を次の規則により定める。 $n = 1, 2, 3, 4$ に対して、 n 回目に投げたとき、表が出たならば $z_n = \omega z_{n-1}$ とし、裏が出たならば $z_n = z_{n-1} + 1$ とする。例えば、4 回投げた結果、順に「裏、表、裏、表」と出た場合、

$$z_1 = z_0 + 1 = 1, \quad z_2 = \omega z_1 = \omega, \quad z_3 = z_2 + 1 = \omega + 1, \quad z_4 = \omega z_3 = \omega^2 + \omega$$

となる。

上の規則により z_1, z_2, z_3, z_4 を定めたとき、 P を $z_4 = 0$ となる確率、 Q を $z_4 = 1$ となる確率、 R を $z_4 = \omega + 1$ となる確率とすると、

$$2^4 P = \boxed{\text{ア}}, \quad 2^4 Q = \boxed{\text{イ}}, \quad 2^4 R = \boxed{\text{ウ}}$$

である。また、 S を $|z_4| = 1$ となる確率、 T を $|z_4| = 2$ となる確率とすると、

$$2^4 S = \boxed{\text{エ}}, \quad 2^4 T = \boxed{\text{オ}}$$

である。

(このページは計算用紙として使用してよい。)

〔Ⅲ〕 次の空欄の 、、、、 に当てはまるものを指定された解答群の中から選び、解答用紙の所定の欄の番号をマークせよ。解答群から同じものを2回以上選んでもよい。空欄 は2桁の数を表すものとし、当てはまる0から9までの数字を解答用紙の所定の欄にマークせよ。

$a > 0$ とする。座標平面上で、原点 O を中心とする半径 a の定円を C_1 とし、 C_1 と外接する半径 a の円を C_2 とする。円 C_2 が定円 C_1 と外接しながらすべることなく転がるとき、 C_2 上の定点 P が描く曲線を考えたい。

始めに C_2 の中心が $(2a, 0)$ にあり、 P が $(a, 0)$ にあるとする。 C_2 の中心が点 $(2a, 0)$ から原点 O を中心に反時計回りに θ だけ回転した位置にきたとき、 C_1 と C_2 の接点を通る C_1 と C_2 の共通の接線を l_θ とする。 l_θ の方程式は、

$$a = \left(\text{>} \right) x + \left(\text{>} \right) y$$

である。このとき、 P は直線 l_θ に関して点 $(a, 0)$ と対称な点であるので、 P の座標を (x, y) とすると、 P の軌跡は θ を媒介変数として、

$$x = 2a \left(\text{>} \right) \cos \theta + a, \quad y = 2a \left(\text{>} \right) \sin \theta$$

と表される。 x と y をそれぞれ θ で微分すると、

$$\frac{dx}{d\theta} = 2a \left(\text{>} \right), \quad \frac{dy}{d\theta} = 2a \left(\text{>} \right)$$

となるので、 θ が0から 2π まで動くとき、 P が描く曲線の長さは a である。

ア、イ、ウ、エ、オの解答群

- | | | | | |
|-----------------|---------------------|---------------------|--------------------------------|---------------------------------|
| ① $\sin \theta$ | ① $1 - \sin \theta$ | ② $1 + \sin \theta$ | ③ $\sin 2\theta - \sin \theta$ | ④ $\cos 2\theta + \cos \theta$ |
| ⑤ $\cos \theta$ | ⑥ $1 - \cos \theta$ | ⑦ $1 + \cos \theta$ | ⑧ $\sin 2\theta + \sin \theta$ | ⑨ $-\cos 2\theta + \cos \theta$ |

(このページは計算用紙として使用してよい。)

〔Ⅳ〕 次の空欄に当てはまるものをそれぞれ指定された解答群の中から選び、解答用紙の所定の欄の番号をマークせよ。なお、解答群から同じものを2回以上選んでもよい。

$t > 1$ とする。 t を底とする対数関数 $y = \log_t x$ で定まる曲線を C とし、 $y = \frac{1}{2}x$ で定まる直線を l とする。このとき、 C と l の共有点の x 座標は次の方程式の解である。

$$\frac{\log x}{x} = \frac{\log t}{2}$$

ここで $\log$ は自然対数であり、 e はその底とする。

$x > 0$ に対して $f(x) = \frac{\log x}{x}$ とおく。 $f(x)$ は $x = \boxed{\text{ア}}$ で最大値 $\boxed{\text{イ}}$ をとり、 $f(1) = \boxed{\text{ウ}}$ 、 $x > 1$ のとき $f(x) > \boxed{\text{ウ}}$ である。また、 $\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \boxed{\text{エ}}$ 、 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ である。したがって、 C と l が2つの共有点を持つための必要十分条件は、

$$\boxed{\text{ウ}} < \frac{\log t}{2} < \boxed{\text{イ}} \quad \dots\dots (1)$$

となる。このとき、2つの共有点の x 座標のうち、小さい方を p とすると、不等式 $1 < p < \boxed{\text{ア}}$ が成り立つ。

(1) を満たす定数 t と $0 < \alpha < p$ を満たす α に対して、次で定まる数列 $\{a_n\}$ を考える。

$$a_1 = \alpha, \quad a_{n+1} = \left(\sqrt{t}\right)^{a_n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

このとき、

$$\log_t \frac{p}{a_{n+1}} = \frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}} (p - a_n) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

が成り立つ。これより、すべての自然数 n に対して、不等式 $a_n < p$ が成り立つこともわかる。

曲線 C が上に凸で、 $x = 1$ における接線の方程式が $y = \frac{1}{\boxed{\text{キ}}}(x - 1)$ であるから、不等式

$$\log_t \frac{p}{a_{n+1}} \geq \frac{1}{\boxed{\text{キ}}} \left(1 - \frac{a_{n+1}}{p}\right) \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

が成り立つ。よって、

$$0 < p - a_{n+1} \leq \frac{p \times \boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{カ}}} (p - a_n) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

がわかる。ゆえに、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \boxed{\text{ク}}$ である。

以上より、

$$b_1 = \sqrt{2}, \quad b_{n+1} = (\sqrt{2})^{b_n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定まる数列を $\{b_n\}$ としたとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \boxed{\text{ケ}}$ である。

ア、イ、ウ、エ、オ、カ、ケの解答群

- | | | | | |
|--------------|-------|-----------------|------------|-------------|
| ① 0 | ① 1 | ② 2 | ③ 3 | ④ 4 |
| ⑤ $\sqrt{2}$ | ⑥ e | ⑦ $\frac{1}{e}$ | ⑧ ∞ | ⑨ $-\infty$ |

キ、クの解答群

- | | | | | |
|--------------|------------|----------------------|--------------|------------------------|
| ① t | ① $\log t$ | ② $\log \frac{1}{t}$ | ③ $\log_t e$ | ④ $\log_t \frac{1}{e}$ |
| ⑤ $\sqrt{t}$ | ⑥ p | ⑦ $\frac{1}{p}$ | ⑧ $\log_t p$ | ⑨ $\log_t \frac{1}{p}$ |

(このページは計算用紙として使用してよい。)

(このページは計算用紙として使用してよい。)