2024年度　明治大学
【総合数理学部】
解答時間　120分
配点　200点

る

数　学　問　題

注意事項

1. 解答を始めるよう合図があるまで，問題冊子は開かないこと。
2. この問題冊子は14ページあります。解答用紙には，「数学①」と「数学②」の２枚あり，「数学②」には表と裏があります。
3. あなたの座席番号は，２枚の解答用紙に印刷されています。印刷されている座席番号と，受験票の番号が一致していることを確認しなさい。
4. 監督者の指示にしたがい，２枚の解答用紙の所定の欄に氏名を記入しなさい。
5. 問題〔Ⅰ〕の解答は，解答用紙「数学①」の所定の欄にマークしなさい。
6. 問題〔Ⅱ〕の解答は，解答用紙「数学①」の所定の欄に記入しなさい。
7. 問題〔Ⅲ〕，〔Ⅳ〕は，解答用紙「数学②」の所定の欄に解答しなさい。
8. １問につき２つ以上マークしないこと。２つ以上マークした場合には，その解答は無効になります。
9. 解答は，必ず鉛筆またはシャープペンシル(いずれもHB・黒)で記入しなさい。
10. 訂正する場合は，消しゴムできれいに消し，消しくずを残さないこと。
11. 解答用紙は，絶対に汚したり折り曲げたりしないこと。また，所定の欄以外には絶対に記入しないこと。
12. 解答用紙は持ち帰らず，必ず提出しなさい。
13. この問題冊子は必ず持ち帰りなさい。
14. 試験時間は120分です。
15. マークシート記入例

良い例	悪　い　例
●	◉　⊗　○

〔Ⅰ〕 次の空欄 $\boxed{\text{ア}}$ と $\boxed{\text{イ}}$，および $\boxed{\text{カ}}$ から $\boxed{\text{タ}}$ にあてはまる 0 から 9 までの数字を，解答用紙の所定の欄にマークせよ。$\boxed{\text{コサ}}$ は 2 桁の数である。ただし，分数形で解答する場合は，既約分数で答えること。また，空欄 $\boxed{\text{ウ}}$ から $\boxed{\text{オ}}$ にあてはまるものを解答群の中から選び，その記号を解答用紙の所定の欄にマークせよ。

(1) 自然数 p, q が $p \leqq q$ かつ $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{4}$ を満たすとき，p の最大値は $\boxed{\text{ア}}$，また p の最小値は $\boxed{\text{イ}}$ である。

（このページは計算用紙として使用してよい）

(2)　$g(x) = \dfrac{1}{x^2}$ とするとき，関数

$$f(x) = x^{g(x)} \quad (x > 0)$$

は $x =$ $\boxed{\text{ウ}}$ で最大値をとる。

ウの解答群

⓪ 1　　① e　　② $\dfrac{1}{e}$　　③ $\dfrac{2}{e}$

④ $\dfrac{1}{2e}$　　⑤ e^2　　⑥ $\dfrac{1}{e^2}$　　⑦ $\sqrt{e}$

⑧ $\dfrac{1}{\sqrt{e}}$　　⑨ e^e

（このページは計算用紙として使用してよい）

(3)　複素数 z が $|z|=1$ を満たすとき，$\left|z^2-z+2\right|$ の最大値は $\boxed{\text{エ}}$，最小値は $\boxed{\text{オ}}$ である。

エ，オの解答群

⓪ 1　　① 2　　② 4　　③ $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

④ $\sqrt{7}$　　⑤ $\dfrac{2\sqrt{11}}{3}$　　⑥ $\dfrac{\sqrt{14}}{3}$　　⑦ $\dfrac{\sqrt{14}}{4}$

⑧ $\dfrac{\sqrt{86}}{3}$　　⑨ $\dfrac{\sqrt{86}}{4}$

（このページは計算用紙として使用してよい）

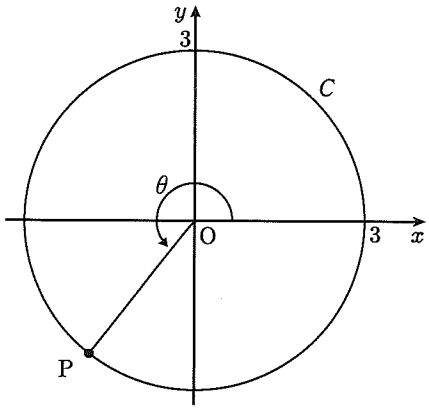
(4)　座標平面上に 2 点 A(9, 12)，B(12, 2) と 円 $C: x^2+y^2=9$ がある。点 P は円 C の上にあるとする。座標平面の原点を O とし，x 軸の正の部分を始線としたときの動径 OP が表す角を θ とする $(0 \leqq \theta < 2\pi)$。

ここで，線分 PA を 1 : 2 に内分する点を Q，線分 PB を 1 : 1 に内分する点を R とする。Q の座標は

$$\left(\boxed{\text{カ}}+\boxed{\text{キ}}\cos\theta,\ \boxed{\text{ク}}+\boxed{\text{ケ}}\sin\theta\right)$$

である。

線分 QR を 4 : 1 に内分する点を S とする。P が円 C の上を動くとき，S の軌跡は，中心 $\left(\dfrac{\boxed{\text{コサ}}}{\boxed{\text{シ}}},\ \dfrac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}\right)$，半径 $\dfrac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}}$ の円である。



（このページは計算用紙として使用してよい）

〔Ⅱ〕 次の空欄 $\boxed{\text{あ}}$ から $\boxed{\text{か}}$ に当てはまるもの (数・式など) を解答用紙の所定の欄に記入せよ。

x_1, x_2, x_3 を解にもつ 3 次方程式を $x^3 - ax^2 + bx - c = 0$ とする。このとき, a, b, c をそれぞれ x_1, x_2, x_3 で表すと

$$a = \boxed{\text{あ}}, \quad b = \boxed{\text{い}}, \quad c = \boxed{\text{う}}$$

である。また, $k = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ を a, b, c で表すと, $k = \boxed{\text{え}}$ である。

x_1^3, x_2^3, x_3^3 を解にもつ 3 次方程式を $x^3 - Ax^2 + Bx - C = 0$ とする。A, B を a, b, c で表すと, $A = \boxed{\text{お}}$, $B = \boxed{\text{か}}$ である。

（このページは計算用紙として使用してよい）

〔Ⅲ〕 n を自然数とする。1から n までの番号をつけた n 枚のカードが袋に入っている。袋は中が見えないとする。さらに1枚のコインがある。

コインを投げて表が出たら袋からカードを1枚とり出して手元におき，袋の中には戻さない。コインの裏が出たらカードはとり出さない。

この操作を n 回まで繰り返すとき，以下の問いに答えよ。結果のみでなく，途中経過も書くこと。

(1) 2回目の操作が終わったとき，番号1のカードが手元にある確率を求めよ。

(2) i は，$1 \leqq i \leqq n$ を満たす自然数とする。n 回目の操作が終わったとき，手元に i 枚のカードがあったとする。このとき，番号1のカードが手元にある確率を求めよ。

(3) n 回目の操作が終わったとき，番号1のカードが手元にある確率を求めよ。

(4) i，j は，$1 \leqq j \leqq i \leqq n$ を満たす自然数とする。n 回目の操作が終わったとき，手元に i 枚のカードがあったとする。このとき，番号1から番号 j までのカードすべてが手元にある確率を求めよ。ただし，k 個から r 個取る組合せの総数を表す記号 (${}_k\mathrm{C}_r$) を用いてもよい。

(5) j は，$1 \leqq j \leqq n$ を満たす自然数とする。n 回目の操作が終わったとき，番号1から番号 j までのカードすべてが手元にある確率を求めよ。

（このページは計算用紙として使用してよい）

〔Ⅳ〕 n を自然数とする。数列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ を

$$x_n = 2n^2 + 2n, \quad y_n = 2n + 1, \quad z_n = 2n^2 + 2n + 1$$

で定める。座標平面の原点を O とする。また，座標が (x_n, y_n) である点を P_n として，動径 OP_n が x 軸の正の向きとなす角を θ_n $(0 < \theta_n < \frac{\pi}{2})$ とする。このとき，以下の問いに答えよ。結果のみでなく，途中経過も書くこと。

(1) $x_n^2 + y_n^2 - z_n^2$ の値を求めよ。

(2) $\sin\theta_n$ を n で表せ。

(3) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos t}\,dt$ を求めよ。

(4) 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n = \int_0^{\theta_n} \frac{z_n}{x_n \cos t + y_n \sin t}\,dt$$

とおくとき，a_n を n で表し，極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(na_n)$ を求めよ。

（このページは計算用紙として使用してよい）