

[I]

[解答]

(1)		ア	イ	ウ	エ	オ
		2	5	4	7	6
(2)		カ	キ	ク	ケ	
		1	2	1	2	
(3)		コ	サ			
		1	8			
(4)	(a)	シ	ス	セ	ソ	
		6	4	8	9	
	(b)	タ	チ	ツ	テ	
		1	6	3	2	

〔Ⅱ〕

〔解答〕

あ
$\frac{1}{\tan \frac{\pi}{2n}}$

〔Ⅲ〕

〔解答〕

(1)	か	き	く
	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$
(2)	け	こ	
	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{18}$	
(3)	さ		
	$\frac{1}{162}$		
(4)	し		
	$\frac{1}{n}$		

〔Ⅳ〕

〔解答〕

(1)	た	ち
	a^2	$a^2 - c^2$

(2)

P における E の法線を ℓ とする。 $x_0 = 0$ のとき、 ℓ は x 軸と一致し、 Q の x 座標は 0 である。

以下、 $x_0 \neq 0$ のときを考える。 P (x_0, y_0) における E の接線の方程式は $\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{a^2 - c^2} = 1$ であ

り、 $y_0 \neq 0$ よりその傾きは

$$-\frac{x_0}{a^2} \cdot \frac{a^2 - c^2}{y_0} = -\frac{(a^2 - c^2)x_0}{a^2 y_0}$$

と表される。よって、 ℓ の傾きは

$$-\frac{1}{-\frac{(a^2 - c^2)x_0}{a^2 y_0}} = \frac{a^2 y_0}{(a^2 - c^2)x_0} \quad (\because x_0 \neq 0)$$

となるため、 ℓ の方程式は

$$y - y_0 = \frac{a^2 y_0}{(a^2 - c^2)x_0} (x - x_0)$$

である。これに $y = 0$ を代入して x について解くと

$$\begin{aligned} -y_0 &= \frac{a^2 y_0}{(a^2 - c^2)x_0} (x - x_0) \\ \Leftrightarrow -\frac{(a^2 - c^2)x_0}{a^2} &= x - x_0 \quad (\because y_0 \neq 0) \\ \Leftrightarrow x &= \frac{c^2 x_0}{a^2} \end{aligned}$$

となるから、 Q の x 座標は $\frac{c^2 x_0}{a^2}$ と表される。これは $x_0 = 0$ のときも成り立つ。

(答) $\frac{c^2 x_0}{a^2}$

$y_0 \neq 0$ より $-a < x_0 < a$ であり、また $a > c > 0$ であるため、

$$-1 < \frac{cx_0}{a^2} < 1 \Leftrightarrow -c < \frac{c^2 x_0}{a^2} < c$$

が成り立つ。したがって、 Q は線分 AB 上にある。

(証明終)

(3)

P は E 上の点であるため

$$\begin{aligned} \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{a^2 - c^2} &= 1 \\ \Leftrightarrow y_0^2 &= (a^2 - c^2) - \frac{a^2 - c^2}{a^2} x_0^2 \quad (\because a > c > 0) \end{aligned}$$

が成り立つ。これを用いると

$$\begin{aligned} AP^2 &= (x_0 + c)^2 + y_0^2 \\ &= (x_0^2 + 2cx_0 + c^2) + \left\{ (a^2 - c^2) - \frac{a^2 - c^2}{a^2} x_0^2 \right\} \\ &= a^2 + 2cx_0 + \frac{c^2 x_0^2}{a^2} \\ &= \left(a + \frac{cx_0}{a} \right)^2 \end{aligned}$$

となる。ここで、(2)の過程より

$$-1 < \frac{cx_0}{a^2} < 1 \Leftrightarrow -a < \frac{cx_0}{a} < a \quad (\because a > 0)$$

であり、 $a + \frac{cx_0}{a} > 0$ となるから、 $AP = a + \frac{cx_0}{a}$ である。また、 $AP + BP = 2a$ より、 $BP = a - \frac{cx_0}{a}$

である。

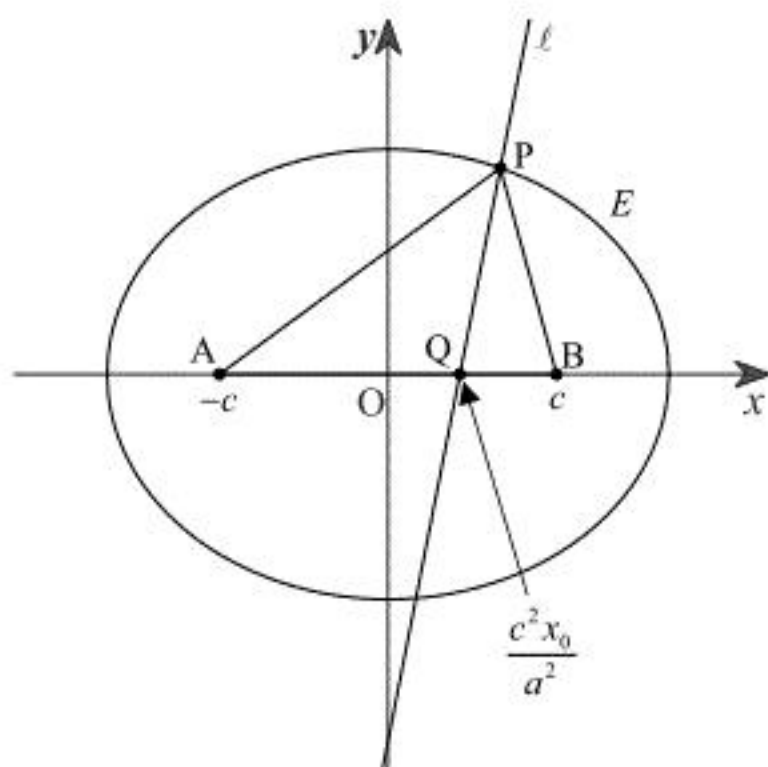
(答) $AP = a + \frac{cx_0}{a}$, $BP = a - \frac{cx_0}{a}$

以上より、 $AP : BP = \left(a + \frac{cx_0}{a} \right) : \left(a - \frac{cx_0}{a} \right) = (a^2 + cx_0) : (a^2 - cx_0)$ である。

(証明終)

(4)

E と ℓ を座標平面上に図示すると次図のようになる。



前図より

$$\begin{aligned} AQ : BQ &= \left(\frac{c^2 x_0}{a^2} + c \right) : \left(c - \frac{c^2 x_0}{a^2} \right) \\ &= \left\{ \frac{c(a^2 + cx_0)}{a^2} \right\} : \left\{ \frac{c(a^2 - cx_0)}{a^2} \right\} \\ &= (a^2 + cx_0) : (a^2 - cx_0) \\ &= AP : BP \end{aligned}$$

が成り立つから、直線 PQ は $\angle APB$ の二等分線である。よって、 $\angle APQ = \angle BPQ$ である。

(証明終)

〔V〕

〔解答〕

(1)	$1, \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4}}{2}$
(2)	$c = \frac{1}{b}$

(3)

$$\begin{aligned}\int f(x) dx &= \int \frac{\log x}{x} dx \\ &= \int \left\{ \log x \cdot (\log x)' \right\} dx \\ &= \frac{1}{2} (\log x)^2 + C\end{aligned}$$

となる。ただし、 C は積分定数である。

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{2} (\log x)^2 + C$$

(4)

与えられた定積分について $\frac{1}{x} = t$ とおくと、 $x = \frac{1}{t}$ より $\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{t^2}$ である。また、積分区間の対応は次表のようになる。

x	$\frac{1}{p}$	$\rightarrow$	p
t	p	$\rightarrow$	$\frac{1}{p}$

したがって

$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{p}}^p g(x) dx &= a \int_{\frac{1}{p}}^p \frac{\log x}{1+x^2} dx \\ &= a \int_p^{\frac{1}{p}} \left\{ \frac{\log \frac{1}{t}}{1+\left(\frac{1}{t}\right)^2} \cdot \left(-\frac{1}{t^2}\right) \right\} dt \\ &= a \int_p^{\frac{1}{p}} \frac{\log t}{t^2+1} dt \\ &= -a \int_{\frac{1}{p}}^p \frac{\log t}{1+t^2} dt \\ &= -\int_{\frac{1}{p}}^p g(x) dx\end{aligned}$$

となるから、 $\int_{\frac{1}{p}}^p g(x) dx = 0$ が成り立つ。

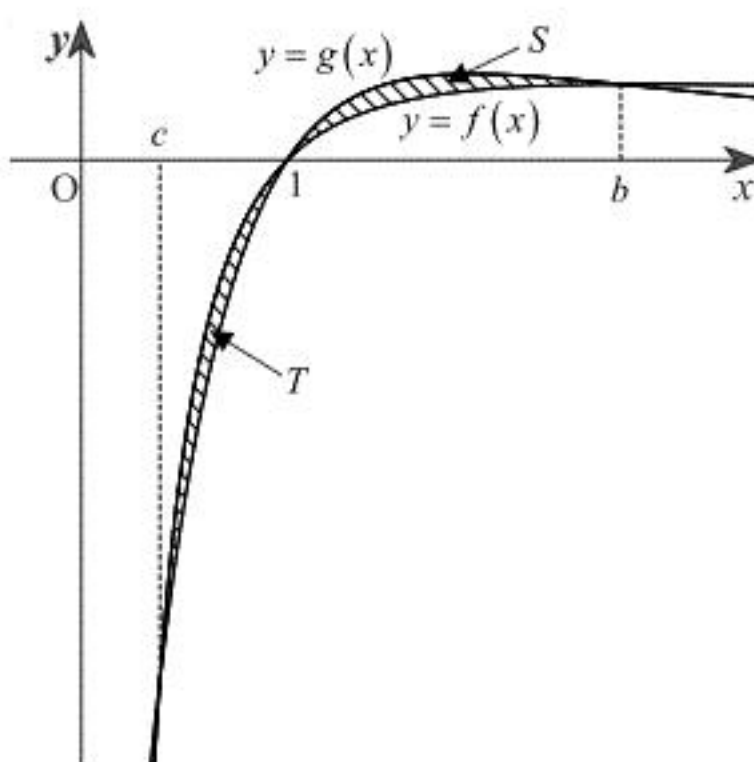
(証明終)

(5)

$f(x), g(x)$ はともに、 $0 < x < 1$ において負、 $1 < x$ において正となり、 $f(1) = g(1) = 0$ である。また

$$f(x) - g(x) = \frac{(x^2 - ax + 1) \log x}{x(x^2 + 1)} = \frac{(x-b)(x-c) \log x}{x(x^2 + 1)}$$

より、 $c < x < 1$ において $f(x) - g(x) > 0$ 、 $1 < x < b$ において $f(x) - g(x) < 0$ とわかる。よって、題意の図形を座標平面上に図示すると、次図の斜線部となる。



前図より

$$\begin{aligned}S - T &= \int_1^b \{g(x) - f(x)\} dx - \int_c^1 \{f(x) - g(x)\} dx \\ &= \int_1^b \{g(x) - f(x)\} dx + \int_{\frac{1}{b}}^1 \{g(x) - f(x)\} dx \quad \left(\because c = \frac{1}{b} \right) \\ &= \int_{\frac{1}{b}}^b \{g(x) - f(x)\} dx \\ &= \int_{\frac{1}{b}}^b g(x) dx - \int_{\frac{1}{b}}^b f(x) dx\end{aligned}$$

である。ここで、 $b > 1$ であるから、(4)の結論より、 $\int_{\frac{1}{b}}^b g(x) dx = 0$ である。これを用いると

$$\begin{aligned}S - T &= -\int_{\frac{1}{b}}^b f(x) dx \\ &= -\left[\frac{1}{2} (\log x)^2 \right]_{\frac{1}{b}}^b \\ &= -\frac{1}{2} \left\{ (\log b)^2 - \left(\log \frac{1}{b} \right)^2 \right\} \\ &= -\frac{1}{2} \{ (\log b)^2 - (-\log b)^2 \} \\ &= 0\end{aligned}$$

となるから、 $S = T$ が成り立つ。

(証明終)