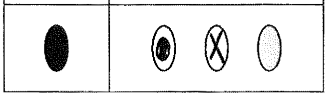
数　学　問　題

注意事項

1. 試験場内では，監督者の指示に従うこと。
2. 解答を始めるよう合図があるまで，問題冊子は開かないこと。
3. この問題冊子は16ページある。ただし，ページ番号のない白紙はページ数に含まない。解答用紙には，「数学①」と「数学②」の２枚あり，「数学②」には表と裏がある。
4. ２枚の解答用紙にそれぞれ印刷されている座席番号が正しいか，受験票と照合すること。
5. 監督者の指示に従い，２枚の解答用紙の所定の欄に氏名を記入すること。
6. 問題〔Ⅰ〕の解答は，解答用紙「数学①」の所定の欄にマークすること。
7. 問題〔Ⅱ〕，〔Ⅲ〕は，解答用紙「数学①」の所定の欄に解答すること。
8. 問題〔Ⅳ〕，〔Ⅴ〕は，解答用紙「数学②」の所定の欄に解答すること。
9. 解答用紙の所定の欄以外のところには何も記入しないこと。
10. １問につき２つ以上マークしないこと。２つ以上マークした場合は，その解答は無効になる。
11. 解答は，必ず鉛筆またはシャープペンシル(いずれもHB・黒)で記入すること。
12. 訂正する場合は，消しゴムできれいに消し，消しくずを残さないこと。
13. 解答用紙は，絶対に汚したり折り曲げたりしないこと。
14. 問題冊子の余白等は適宜利用してよいが，どのページも切り離さないこと。
15. 解答用紙は持ち帰らず，必ず提出すること。
16. 問題冊子は必ず持ち帰ること。
17. 不正行為または不正行為と疑われる行為は行わないこと。
18. 試験時間は120分である。
19. マークシート記入例

良い例	悪　い　例



〔Ⅰ〕 次の空欄 $\boxed{\text{ア}}$ から $\boxed{\text{オ}}$, $\boxed{\text{シ}}$ から $\boxed{\text{ソ}}$ に当てはまるものを指定された解答群の中から選び，その記号を解答用紙の所定の欄にマークせよ。また $\boxed{\text{カ}}$ から $\boxed{\text{サ}}$, $\boxed{\text{タ}}$ から $\boxed{\text{テ}}$ に当てはまる 0 から 9 までの数字を，解答用紙の所定の欄にマークせよ。ただし，i は虚数単位である。

(1) $\alpha = \cos\dfrac{2\pi}{5} + i\sin\dfrac{2\pi}{5}$ とおく。$z = \alpha$ は方程式 $\boxed{\text{ア}} = 0$ を満たす。

$\beta = \alpha + \dfrac{1}{\alpha}$ とおくとき，$x = \beta$ を解とする方程式を $x^2 + ax + b = 0$ とすると

$$a = \boxed{\text{イ}}, \quad b = \boxed{\text{ウ}}$$

である。

これから

$$\cos\frac{2\pi}{5} = c + d\sqrt{5}$$

とすると

$$c = \boxed{\text{エ}}, \quad d = \boxed{\text{オ}}$$

となる。

アの解答群

⓪ $z^4 + z^2 + 1$　① $z^4 - z^2 + 1$
② $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1$　③ $z^4 - z^3 + z^2 - z + 1$
④ $z^4 + 2z^3 + 2z^2 + 2z + 1$　⑤ $z^4 - 2z^3 + 2z^2 - 2z + 1$
⑥ $z^4 + 2z^3 + 3z^2 + 2z + 1$　⑦ $z^4 - 2z^3 + 3z^2 - 2z + 1$
⑧ $z^4 + 4z^3 + 6z^2 + 4z + 1$　⑨ $z^4 - 4z^3 + 6z^2 - 4z + 1$

イ，ウの解答群

⓪ -5　① -4　② -3　③ -2
④ -1　⑤ 1　⑥ 2　⑦ 3
⑧ 4　⑨ 5

エ，オの解答群

⓪ $\dfrac{1}{2}$　① $-\dfrac{1}{2}$　② $\dfrac{1}{3}$　③ $-\dfrac{1}{3}$
④ $\dfrac{2}{3}$　⑤ $-\dfrac{2}{3}$　⑥ $\dfrac{1}{4}$　⑦ $-\dfrac{1}{4}$
⑧ $\dfrac{3}{4}$　⑨ $-\dfrac{3}{4}$

（このページは計算用紙として使用してよい）

(2)　座標空間内に 2 点 P$(1,0,1)$，Q$(1,1,1)$ をとる。点 R が x 軸上を動くとき

$$\angle \mathrm{PRQ} \geqq 30^\circ$$

となるような R の x 座標の範囲は

$$\boxed{\text{カ}} - \sqrt{\boxed{\text{キ}}} \leqq x \leqq \boxed{\text{ク}} + \sqrt{\boxed{\text{ケ}}}$$

である。

（このページは計算用紙として使用してよい）

(3)　ℓ と m は 0 以上の整数とする。このとき，$5\ell + 7m$ の形で表すことができない自然数のうち，2 番目に大きなものは $\boxed{\text{コ}}\boxed{\text{サ}}$ である。答えが 1 桁の数の場合は，十の位に 0 を埋めよ。

（このページは計算用紙として使用してよい）

(4) 座標平面内に点 A$(0, -2)$ と曲線 S: $x^2 - y^2 = 4$ (ただし $x > 0$) がある。

(a) S の接線であって，A からの距離が 2 であるものは 2 本あり，それらを

$$ax + by = 4, \quad cx + dy = 4 \quad (\text{ただし } a < c)$$

と表すとき

$$a = \boxed{\text{シ}}, \quad b = \boxed{\text{ス}}, \quad c = \boxed{\text{セ}}, \quad d = \boxed{\text{ソ}}$$

である。

(b) (a) の 2 本の接線と S が囲む図形を，x 軸のまわりに回転させてできる回転体の体積は

$$\frac{\pi}{3}\left(p\sqrt{5} - q\right)$$

と表せる。ここで p と q は自然数であり，それぞれ

$$p = \boxed{\text{タ}}\boxed{\text{チ}}, \quad q = \boxed{\text{ツ}}\boxed{\text{テ}}$$

である。答えが 1 桁の数の場合は，十の位に 0 を埋めよ。

シ，ス，セ，ソの解答群

⓪ $-2\sqrt{5}$	① $-\sqrt{5}$	② -2	③ -1
④ 0	⑤ 1	⑥ 2	⑦ $\sqrt{5}$
⑧ $2\sqrt{5}$	⑨ 4		

（このページは計算用紙として使用してよい）

〔Ⅱ〕 次の空欄 $\boxed{\text{あ}}$ に当てはまるもの (数・式など) を解答用紙の所定の欄に記入せよ。

n を 2 以上の自然数とする。$1 \leqq k \leqq n-1$ を満たす整数 k に対して

$$a_k = \frac{\sin \frac{\pi}{2n}}{\left\{\sin \frac{(k+1)\pi}{2n}\right\}\left(\sin \frac{k\pi}{2n}\right)}$$

とおくとき，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} a_k$ を計算すると

$$\sum_{k=1}^{n-1} a_k = \boxed{\quad\text{あ}\quad}$$

である。

（このページは計算用紙として使用してよい）

〔Ⅲ〕 次の空欄 $\boxed{\text{か}}$ から $\boxed{\text{し}}$ に当てはまるもの (数・式など) を解答用紙の所定の欄に記入せよ。なお，分数は既約分数にすること。

ある誰もいない場所に人が1人ずつ集まるとする。$n \geqq 1$ として，n 番目に到着した人は，

(a) n が2以上の場合，すでにいる $(n-1)$ 人のいずれか1人だけと互いに友人になるか，$(n-1)$ 人の誰とも友人にならないか，確率的に決まるものとする。このとき，すでにいる人と互いに友人になる確率は，$(n-1)$ 人それぞれについて $\frac{1}{n}$，$(n-1)$ 人の誰とも友人にならない確率も $\frac{1}{n}$ とする。すでにいる $(n-1)$ 人の間の友人関係は変わらないものとする。

例えば n が3の場合，3番目に到着した人が，1番目に到着した人と友人になる確率は $\frac{1}{3}$，そうではなく2番目に到着した人と友人になる確率は $\frac{1}{3}$，そのどちらでもなく誰とも友人にならない確率は $\frac{1}{3}$ である。

(b) n が1の場合，そのときには誰とも友人にならない。

また，友人関係でつながっている人たちの集まりをグループと呼ぶ。例えば A と B が互いに友人で，B と C が互いに友人ならば，A，B，C は同じグループに属する。グループの人数をサイズと呼ぶことにする。ただし，誰とも友人になっていない人は，その人だけからなるサイズ1のグループであるとみなす。この場所に到着してグループが決まった人は，そのときに自分のいるグループのサイズ（自分自身も含める）を点数として得るものとする。

グループのサイズの組合せを考える。例えば3人集まったとき，(i) サイズ3のグループが1つ，(ii) サイズ2のグループが1つとサイズ1のグループが1つ，(iii) サイズ1のグループが3つ，の全部で3通りの場合がある。グループのサイズを大きい順に並べてそれぞれの場合を $\langle 3 \rangle$，$\langle 2,1 \rangle$，$\langle 1,1,1 \rangle$ と表すことにする。

(1) 3人が集まったとする。グループのサイズの組合せが $\langle 3 \rangle$，$\langle 2,1 \rangle$，$\langle 1,1,1 \rangle$ となる確率は，それぞれ $\boxed{\text{か}}$，$\boxed{\text{き}}$，$\boxed{\text{く}}$ である。

(2) 6人が集まったとする。グループのサイズの組合せが $\langle 3,2,1 \rangle$ となる確率は $\boxed{\text{け}}$ である。グループのサイズの組合せが $\langle 3,2,1 \rangle$ で，なおかつ6番目に到着した人が2点を得る確率は $\boxed{\text{こ}}$ である。

(3)　9 人が集まったとする。グループのサイズの組合せが $\langle 3,3,3\rangle$ となる確率は $\boxed{\quad さ \quad}$ である。

(4)　$n \geqq 3$ とする。n 番目に到着した人が $(n-1)$ 点を得る確率は $\boxed{\quad し \quad}$ である。

〔Ⅳ〕 a と c は $a > c > 0$ を満たす定数とする。座標平面上で 2 点 $\mathrm{A}(-c, 0)$，$\mathrm{B}(c, 0)$ からの距離の和が $2a$ である点の軌跡を E とする。$\mathrm{P}(x_0, y_0)$ は E 上の点で $y_0 \neq 0$ を満たすとし，P における E の法線と x 軸との交点を Q とする。以下の問いに答えよ。(1) は結果のみ答え，(2)，(3)，(4) は途中経過も記述せよ。

(1) E の方程式は

$$\frac{x^2}{\boxed{\text{た}}} + \frac{y^2}{\boxed{\text{ち}}} = 1$$

と表せる。$\boxed{\text{た}}$，$\boxed{\text{ち}}$ に当てはまるものを a と c で表せ。

(2) Q の x 座標を a，c，x_0 で表せ。また Q が線分 AB 上にあることを示せ。

(3) AP，BP を求め，$\mathrm{AP} : \mathrm{BP} = (a^2 + cx_0) : (a^2 - cx_0)$ であることを示せ。

(4) $\angle\mathrm{APQ} = \angle\mathrm{BPQ}$ であることを示せ。

（このページは計算用紙として使用してよい）

〔V〕　a は $a>2$ を満たす定数とする。また $x>0$ の範囲で定義された2つの関数を

$$f(x)=\frac{\log x}{x},\quad g(x)=\frac{\log x^a}{1+x^2}$$

とし，座標平面における曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$ を考える。以下の問いに答えよ。(1) と (2) は結果のみ答え，(3)，(4)，(5) は途中経過も記述せよ。

(1)　曲線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ の交点の x 座標をすべて求めよ。

(2)　(1) で求まったもののうち，最大のものを b とし，最小のものを c とする。c を b で表せ。

(3)　不定積分 $\displaystyle\int f(x)\,dx$ を求めよ。

(4)　$p>1$ に対して，$\displaystyle\int_{\frac{1}{p}}^{p} g(x)\,dx=0$ を示せ。

(5)　$c\leqq x\leqq b$ の範囲で，2曲線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ で囲まれる図形において，$y\geqq 0$ の部分の面積を S とし，$y\leqq 0$ の部分の面積を T とする。このとき，$S=T$ となることを示せ。ただし，b と c は (2) で定めたものとする。

（このページは計算用紙として使用してよい）