

(1)

3点A, B, Pがこの順に時計回りの位置にあり, また $\triangle ABP$ が $\angle ABP$ を直角とする直角二等辺三角形であることから, 点Pは点Aを点Bを中心に反時計回りに 90° だけ回転移動させた点である。よって,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BP} &= \begin{pmatrix} \cos 90^\circ & -\sin 90^\circ \\ \sin 90^\circ & \cos 90^\circ \end{pmatrix} \overrightarrow{BA} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ -b \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}\end{aligned}$$

である。したがって,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BP} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} b \\ a+b \end{pmatrix}\end{aligned}$$

となる。よって, 点Pの座標は $(b, a+b)$ である。

(答) $(b, a+b)$

(2)

$AB=1$ であることより, $a^2+b^2=1$ である。 $a^2+b^2=1$ を満たす実数 a, b が存在するとき, $-1 \leq a \leq 1, -1 \leq b \leq 1$ となる。点Aが x 軸の $x \geq 0$ の範囲を動くとき, $a \geq 0$ であることも併せて, $0 \leq a \leq 1, -1 \leq b \leq 1$ であり,

$$a = \sqrt{1-b^2}$$

とかける。これより, 点Pの座標は $(b, \sqrt{1-b^2}+b)$ とかける。したがって, $P(x, y)$ とおくときに満たされる式

$$y = \sqrt{1-x^2} + x$$

が点Pの軌跡Cの方程式である。

(答) $C: y = \sqrt{1-x^2} + x$

(3)

Cと x 軸との交点の座標を求める。この交点が存在するとき, 交点の x 座標について

$$\sqrt{1-x^2} + x = 0$$

$$\Leftrightarrow -x = \sqrt{1-x^2} \geq 0$$

が成立するため, $x \leq 0$ でなければならない。したがって, この交点の x 座標は

$$\begin{aligned}-x &= \sqrt{1-x^2} \\ \Leftrightarrow x^2 &= 1-x^2 \\ \therefore x &= -\frac{1}{\sqrt{2}} (< 0)\end{aligned}$$

となる。したがって, 求める体積は,

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 \pi \left(\sqrt{1-x^2} + x \right)^2 dx &= \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 \pi \left(1 + 2x\sqrt{1-x^2} \right) dx \\ &= \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 \pi \left\{ 1 - (1-x^2)' \sqrt{1-x^2} \right\} dx \\ &= \pi \left[x - \frac{2}{3} (1-x^2)^{\frac{3}{2}} \right]_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 \\ &= \left(\frac{2\sqrt{2}}{3} + 1 \right) \pi\end{aligned}$$

である。

(答) $\left(\frac{2\sqrt{2}}{3} + 1 \right) \pi$

(1)

曲線 $y = f(x)$ の点 P における接線の傾きは $f'(t)$ である。この接線上の点 P, Q の x 座標がそれぞれ $t, t+1$ であることから、

$$\overrightarrow{PQ} = (1, f'(t))$$

である。 $\overrightarrow{OP} = (t, f(t))$ であるから、

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \frac{\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{PQ}}{|\overrightarrow{OP}| |\overrightarrow{PQ}|} \\ &= \frac{t + f(t)f'(t)}{\sqrt{t^2 + \{f(t)\}^2} \sqrt{1 + \{f'(t)\}^2}}\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \cos \theta = \frac{t + f(t)f'(t)}{\sqrt{t^2 + \{f(t)\}^2} \sqrt{1 + \{f'(t)\}^2}}$$

(2)

$f(x) = \sqrt{x}$ のとき、 $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ である。したがって、

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \frac{t + \frac{1}{2}}{\sqrt{t^2 + t} \sqrt{1 + \frac{1}{4t}}} \\ &= \frac{2t+1}{\sqrt{t+1} \sqrt{4t+1}}\end{aligned}$$

であり、 $\frac{1}{4} < t < 1$ の範囲において $\cos \theta$ は常に正となる。ここで $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ とすると、 θ が最

大となるとき $\cos \theta (> 0)$ は最小となるため、求める t の値は

$$g(t) = \frac{(2t+1)^2}{(t+1)(4t+1)}$$

が最小となるような t の値である。したがって、相加平均・相乗平均の大小関係により、

$$\begin{aligned}g(t) &= \frac{(2t+1)^2}{(t+1)(4t+1)} \\ &= 1 - \frac{t}{4t^2 + 5t + 1} \\ &= 1 - \frac{1}{4t + 5 + \frac{1}{t}} \\ &\geq 1 - \frac{1}{2\sqrt{4t \cdot \frac{1}{t}} + 5} \\ &= \frac{8}{9}\end{aligned}$$

となる。等号を成立させる t の値が求める値であるから、 $4t = \frac{1}{t}$ 、すなわち、 $t = \frac{1}{2}$ となる。

$$(\text{答}) t = \frac{1}{2}$$

(3)

$\overrightarrow{OP}$ と $\overrightarrow{PQ}$ が直交するとき、 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{PQ} = 0$ が成立する。よって、

$$t + f(t)f'(t) = 0$$

である。したがって、両辺を t で積分すると、積分定数を C として

$$\begin{aligned}\int (t + f(t)f'(t)) dt &= C \\ \Leftrightarrow \frac{t^2}{2} + \frac{\{f(t)\}^2}{2} &= C \\ \Leftrightarrow t^2 + \{f(t)\}^2 &= 2C\end{aligned}$$

が導かれる。この式に $t=1$ を代入すると $f(1) = \sqrt{3}$ より、

$$\begin{aligned}1^2 + (\sqrt{3})^2 &= 2C \\ \Leftrightarrow C &= 2\end{aligned}$$

となるから、

$$\{f(t)\}^2 = 4 - t^2$$

となる。 $\frac{1}{2} < t < 2$ より $4 - t^2 > 0$ であるから、

$$f(t) = \pm \sqrt{4 - t^2}$$

となるが、 $f(1) = \sqrt{3}$ より $f(t) = -\sqrt{4 - t^2}$ の場合は不適である。したがって、求める $f(x)$ は

$f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ である。

$$(\text{答}) f(x) = \sqrt{4 - x^2}$$

(1)

条件(i)により、 $\vec{p}$ と $\vec{r}$ のなす角が 2θ であることから、

$$0 < 2\theta < \pi$$

$$\Leftrightarrow 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \quad \dots \textcircled{1}$$

がわかる。また、 $\vec{p} = (2, 1)$ より $|\vec{p}| = \sqrt{5}$ であるから、条件(ii)により、

$$|\vec{q}| = |\vec{p}|^2 = 5$$

$$|\vec{r}| = |\vec{p}|^3 = 5\sqrt{5}$$

がわかる。さらに、条件(iii)により、

$$2|\vec{p} \cdot \vec{q}| = |\vec{r}|$$

$$\Leftrightarrow 2\left|\vec{p}\right|\left|\vec{q}\right|\cos\theta = |\vec{r}|$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot \sqrt{5} \cdot 5 |\cos\theta| = 5\sqrt{5}$$

$$\Leftrightarrow |\cos\theta| = \frac{1}{2}$$

であるから、これと①より $\theta = \frac{\pi}{3}$ がわかる。ここで、点Pは第1象限に存在し、点Rは第2

象限にあることから、 $\vec{r}$ の向きは $\vec{p}$ を $\frac{2}{3}\pi$ だけ回転させたものに等しい。ここで点Qについ

て、 $\vec{q}$ の向きは $\vec{p}$ を $\frac{\pi}{3}$ だけ回転させたものと、 $-\frac{\pi}{3}$ だけ回転させたものの2通りが考えられ

るが、後者の場合 $\vec{q}$ と $\vec{r}$ のなす角が π となり、 $\vec{q}$ と $\vec{r}$ が平行ではないという条件(iv)に反する。

以上により、

$$\begin{aligned} \vec{q} &= \sqrt{5} \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{3} & -\sin \frac{\pi}{3} \\ \sin \frac{\pi}{3} & \cos \frac{\pi}{3} \end{pmatrix} \vec{p} \\ &= \begin{pmatrix} \sqrt{5} - \frac{\sqrt{15}}{2} \\ \frac{\sqrt{5}}{2} + \sqrt{15} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。よって、点Qの座標は $\left(\sqrt{5} - \frac{\sqrt{15}}{2}, \frac{\sqrt{5}}{2} + \sqrt{15}\right)$ である。

$$(\text{答}) \quad \theta = \frac{\pi}{3}, Q\left(\sqrt{5} - \frac{\sqrt{15}}{2}, \frac{\sqrt{5}}{2} + \sqrt{15}\right)$$

(2)

(1)の結果により、点Pを点Qに、点Qを点Rに移す一次変換 f は $\sqrt{5}$ 倍の拡大変換と $\frac{\pi}{3}$ の

回転変換の合成変換であることがわかる。したがって、 f を表す行列を A とすると、

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{5} \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{3} & -\sin \frac{\pi}{3} \\ \sin \frac{\pi}{3} & \cos \frac{\pi}{3} \end{pmatrix} \\ &= \sqrt{5} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

である。したがって、 f により点Pに移される点の座標を (x, y) とおくと、

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= A^{-1} \vec{p} \\ &= \frac{\sqrt{5}}{10} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{\sqrt{5}}{10} \begin{pmatrix} 2 + \sqrt{3} \\ 1 - 2\sqrt{3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \left(\frac{2\sqrt{5} + \sqrt{15}}{10}, \frac{\sqrt{5} - 2\sqrt{15}}{10} \right)$$

(1)

$\vec{a}, \vec{b}$ の x 成分が同符号になるのは、1 回目の手順の 1 回目と 2 回目の手順の 1 回目に出るコインの表裏が一致する場合であるから、その確率 α は

$$\begin{aligned}\alpha &= p \cdot p + (1-p) \cdot (1-p) \\ &= 2p^2 - 2p + 1\end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \alpha = 2p^2 - 2p + 1$$

(2)

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1$ となるのは、 $\vec{a}, \vec{b}$ の x, y, z 成分のうち、いずれか 2 つが同符号で、残りが異符号である場合である。 x, y, z 成分の各成分において、同符号になる確率は α 、異符号になる確率は $1-\alpha$ である。同符号になる成分の選び方は ${}_3C_2$ 通りあるから、求める確率は

$${}_3C_2 \cdot \alpha^2 (1-\alpha) = 3\alpha^2 (1-\alpha)$$

となる。

$$(\text{答}) \quad 3\alpha^2 (1-\alpha)$$

(3)

$\vec{a} \cdot \vec{b}$ のとり得る値は $3, 1, -1, -3$ があり、それぞれの値をとる確率は、各成分の符号の組み合わせを考えて、以下の表のようになる。

$\vec{a} \cdot \vec{b}$	3	1	-1	-3
確率	α^3	$3\alpha^2(1-\alpha)$	$3\alpha(1-\alpha)^2$	$(1-\alpha)^3$

したがって、求める期待値は、

$$3 \cdot \alpha^3 + 1 \cdot 3\alpha^2(1-\alpha) + (-1) \cdot 3\alpha(1-\alpha)^2 + (-3) \cdot (1-\alpha)^3 = 6\alpha - 3$$

である。

$$(\text{答}) \quad 6\alpha - 3$$

(4)

$p = \frac{1}{2}$ から、 $\alpha = \frac{1}{2}$ である。また、 $\vec{a} \cdot \vec{d}$ を計算すると、

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{d} &= |\vec{a}|^2 + \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} \\ &= 3 + \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}\end{aligned}$$

である。 $\vec{a} \cdot \vec{d}$ が 0 以下となるのは、

$$(\vec{a} \cdot \vec{b}, \vec{a} \cdot \vec{c}) = (-3, -3), (-3, -1), (-1, -3)$$

となる場合のみであり、このようになる確率は、

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot 3\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 3\left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{7}{64}$$

である。求める確率は上記の場合の余事象の確率であるから、

$$1 - \frac{7}{64} = \frac{57}{64}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{57}{64}$$