

平成 20 年度

前 期 日 程

数 学 (120 分)

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
また、別冊の解答用紙についても同じです。
2. 問題は、1 ページから 4 ページまであります。解答用紙は、前 1，
前 2，前 3，前 4 の 4 枚からなっています。ページの脱落等に気付いたときは、手をあげて監督者に知らせなさい。
3. 解答はすべて、各問題の解答用紙の解答欄に記入しなさい。
なお、解答用紙の裏にも解答を記入する場合には、表と上下を逆にして記入しなさい。
4. 監督者の指示に従って、すべての解答用紙の該当欄に志望学科名及び受験番号
(2 か所)を記入しなさい。
5. 解答用紙の※を付した欄には、何も記入してはいけません。
6. 試験終了後、この問題冊子は持ち帰りなさい。

1 座標平面上に異なる 2 点 $A(a, 0)$, $B(0, b)$ を取る。さらに次の 2 つの条件を満たす点 P を取る。

(i) $\triangle ABP$ は $\angle ABP$ を直角とする直角二等辺三角形である。

(ii) 3 点 A , B , P はこの順に時計回りの位置にある。

このとき次の問いに答えよ。

(1) 点 P の座標を a , b を用いて表せ。

(2) $AB = 1$ を満たしながら, 点 A は x 軸の $x \geq 0$ の範囲を動き, 点 B は y 軸上を動く。このとき点 P の軌跡 C を求めよ。

(3) (2) で求めた C , x 軸および直線 $x = 1$ で囲まれる図形を x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ。

2 曲線 $y = f(x)$ ($0 < a \leq x \leq b$) 上の点 $P(t, f(t))$ ($a < t < b$) における接線を ℓ とし, ℓ 上の点でその x 座標が $t + 1$ となる点を Q とおく。原点を O とし、次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{OP}$ と $\overrightarrow{PQ}$ のなす角を θ とするとき, $\cos \theta$ を t を用いて表せ。

(2) $a = \frac{1}{4}$, $b = 1$, $f(x) = \sqrt{x}$ のとき, θ が最大となる t を求めよ。

(3) $a = \frac{1}{2}$, $b = 2$ とする。すべての t ($\frac{1}{2} < t < 2$) について $\overrightarrow{OP}$ と $\overrightarrow{PQ}$ が直交し, $f(1) = \sqrt{3}$ となる $f(x)$ を求めよ。

3 座標平面上に点 $P(2, 1)$ ，点 Q および第 2 象限の点 R を取る。これらの点の原点を基準とする位置ベクトル $\vec{p}$ ， $\vec{q}$ ， $\vec{r}$ は次の条件を満たす。

(i) $\vec{p}$ と $\vec{q}$ がなす角を θ とするとき， $\vec{p}$ と $\vec{r}$ がなす角は 2θ である。

(ii) $|\vec{p}||\vec{r}| = |\vec{q}|^2 = |\vec{p}|^4$

(iii) $2|\vec{p} \cdot \vec{q}| = |\vec{r}|$

(iv) $\vec{q}$ と $\vec{r}$ は平行ではない。

次の問いに答えよ。

(1) 角 θ と点 Q の座標を求めよ。

(2) 点 P を点 Q に，点 Q を点 R に移す 1 次変換を f とする。このとき f により点 P に移される点の座標を求めよ。

- 4** 表の出る確率が p ($0 < p < 1$), 裏の出る確率が $1 - p$ のコインを用いて, 以下の手順により 1 つの空間ベクトルを定める。1 回目にコインを投げて, 表が出れば x 成分を 1, 裏が出れば x 成分を -1 とし, 2 回目にコインを投げて同じように y 成分を決め, 3 回目にコインを投げて同じように z 成分を決める。
- この手順を 3 回繰り返して, 3 つの空間ベクトル $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ を決める。 $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の x 成分が同符号となる確率を α とする。

- (1) α を p を用いて表せ。
- (2) 内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ が 1 となる確率を α を用いて表せ。
- (3) 内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ の期待値を α を用いて表せ。
- (4) $\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$, $p = \frac{1}{2}$ として内積 $\vec{a} \cdot \vec{d}$ が正となる確率を求めよ。