

(1)

曲線 $C: \sqrt[3]{\frac{x}{a}} + \sqrt[3]{\frac{y}{b}} = 1$ を y について解くと

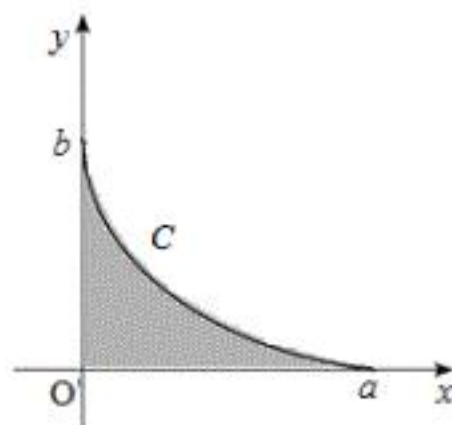
$$y = b \left(1 - \sqrt[3]{\frac{x}{a}} \right)^3 = b \left\{ 1 - 3 \left(\frac{x}{a} \right)^{\frac{1}{3}} + 3 \left(\frac{x}{a} \right)^{\frac{2}{3}} - \frac{x}{a} \right\}$$

であり, S_1 は次図の塗りつぶした部分の面積なので

$$S_1 = \int_0^a b \left\{ 1 - 3 \left(\frac{x}{a} \right)^{\frac{1}{3}} + 3 \left(\frac{x}{a} \right)^{\frac{2}{3}} - \frac{x}{a} \right\} dx$$

$$= b \left[x - \frac{9}{4} a \left(\frac{x}{a} \right)^{\frac{4}{3}} + \frac{9}{5} a \left(\frac{x}{a} \right)^{\frac{5}{3}} - \frac{1}{2a} x^2 \right]_0^a$$

$$= \frac{ab}{20}$$



(答) $\frac{ab}{20}$

(2)

直線 $l: \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ を y について解くと

$$y = b \left(-\frac{x}{a} + 1 \right)$$

である。ここで, $0 \leq x \leq a$ の範囲では

$$b \left(-\frac{x}{a} + 1 \right) - b \left\{ 1 - 3 \left(\frac{x}{a} \right)^{\frac{1}{3}} + 3 \left(\frac{x}{a} \right)^{\frac{2}{3}} - \frac{x}{a} \right\}$$

$$= 3b \left(\frac{x}{a} \right)^{\frac{1}{3}} \left\{ 1 - \left(\frac{x}{a} \right)^{\frac{1}{3}} \right\}$$

$$\geq 0$$

が成り立つので, 直線 l は曲線 C より y 方向に関して正の側にある。

よって, S_2 は次図の塗りつぶした部分の面積なので

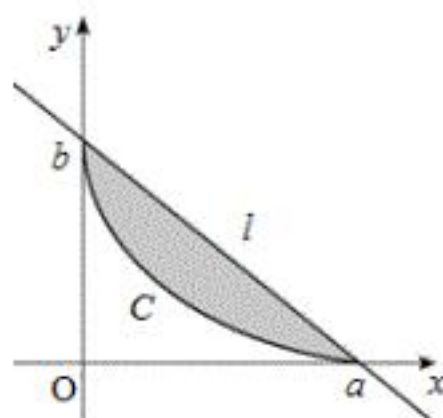
$$S_2 = \frac{1}{2} ab - S_1$$

$$= \frac{1}{2} ab - \frac{ab}{20}$$

$$= \frac{9}{20} ab$$

よって,

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{1}{9}$$



(答) $\frac{1}{9}$

(1)

楕円上の点を $(\sqrt{7} \cos \theta, \sqrt{3} \sin \theta)$ と表す。この点を、原点を中心に反時計回りに $\frac{\pi}{6}$ だけ回転して移った先の点を (X, Y) とすると、

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{6} & -\sin \frac{\pi}{6} \\ \sin \frac{\pi}{6} & \cos \frac{\pi}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{7} \cos \theta \\ \sqrt{3} \sin \theta \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{21} \cos \theta - \sqrt{3} \sin \theta \\ \sqrt{7} \cos \theta + 3 \sin \theta \end{pmatrix}$$

となるので、これを $\cos \theta, \sin \theta$ について解くと

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{\sqrt{3}X + Y}{2\sqrt{7}} \\ \sin \theta = \frac{-X + \sqrt{3}Y}{2\sqrt{3}} \end{cases}$$

となる。 $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ に代入して

$$\left(\frac{\sqrt{3}X + Y}{2\sqrt{7}} \right)^2 + \left(\frac{-X + \sqrt{3}Y}{2\sqrt{3}} \right)^2 = 1$$

整理すると

$$4X^2 - 2\sqrt{3}XY + 6Y^2 = 21$$

$$(\text{答}) \quad 4x^2 - 2\sqrt{3}xy + 6y^2 = 21$$

(2)

方程式 $4x^2 - 2\sqrt{3}tx + 6t^2 - 21 = 0$ が実数解を持てばよい。

その条件は、判別式を D とすると

$$\frac{D}{4} = 3t^2 - 4(6t^2 - 21) \geq 0$$

$$t^2 - 4 \leq 0$$

$$\therefore -2 \leq t \leq 2$$

$$(\text{答}) \quad -2 \leq t \leq 2$$

(3)

x 軸に平行な辺の y 座標を t とすると、辺の両端の x 座標の値は、

$$4x^2 - 2\sqrt{3}tx + 6t^2 - 21 = 0$$

の 2 解であるから、2 解の差、すなわち x 軸に平行な辺の長さは

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{3}t + \sqrt{(\sqrt{3}t)^2 - 4(6t^2 - 21)}}{4} - \frac{\sqrt{3}t - \sqrt{(\sqrt{3}t)^2 - 4(6t^2 - 21)}}{4} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{21(4 - t^2)} \end{aligned}$$

図形の対称性から $-2 \leq t \leq 0$ に限定して考えてよい。三角形の面積が最大となるとき、もう 1 つの頂点の y 座標は明らかに 2 である。よって、三角形の面積は

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \sqrt{21(4 - t^2)} \times (-t + 2) = \frac{\sqrt{21}}{4} \sqrt{(4 - t^2)(-t + 2)^2}$$

と表される。 $f(t) = (4 - t^2)(-t + 2)^2$ とおくと、

$$\begin{aligned} f'(t) &= -2t(-t + 2)^2 - 2(-t + 2)(4 - t^2) \\ &= -4(t - 2)^2(t + 1) \end{aligned}$$

よって、次の増減表をえる。

t	-2	...	-1	...	0
$f'(t)$		+	0	-	
$f(t)$		/	27	\	

増減表より、三角形の面積の最大値は、

$$\frac{\sqrt{21}}{4} \times \sqrt{27} = \frac{9\sqrt{7}}{4}$$

$$(\text{答}) \quad \frac{9\sqrt{7}}{4}$$

3

(1)

$f(1) = \int_0^1 \frac{1}{t^2+1} dt$ において, $t = \tan \theta$ とおくと,

$$t:0 \rightarrow 1 \text{ のとき } \theta:0 \rightarrow \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{dt}{d\theta} = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

よって,

$$\begin{aligned} f(1) &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{1+\tan^2 \theta} \times \frac{1}{\cos^2 \theta} \right) d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} 1 d\theta \\ &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

(答) $\frac{\pi}{4}$

(2)

$$g'(x) = -\frac{1}{x^2} f'\left(\frac{1}{x}\right)$$

ここで, $f(x) = \int_0^x \frac{1}{t^2+1} dt$ であるから,

$$f'(x) = \frac{1}{x^2+1}$$

よって

$$\begin{aligned} g'(x) &= -\frac{1}{x^2} f'\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= -\frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)^2+1} \\ &= -\frac{1}{1+x^2} \end{aligned}$$

(答) $g'(x) = -\frac{1}{x^2+1}$

また,

$$f'(x) + g'(x) = \frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+1} = 0$$

であるから,

$$f(x) + g(x) = \int \{f'(x) + g'(x)\} dx = (\text{一定})$$

が成り立つ。いま,

$$g(1) = f(1) = \frac{\pi}{4}$$

であるから,

$$f(x) + g(x) = f(1) + g(1) = \frac{\pi}{2}$$

(証明終)

(3)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\pi}{2} - g(x) \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\pi}{2} - f\left(\frac{1}{x}\right) \right) \end{aligned}$$

ここで,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{x}\right) &= \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

よって,

$$\alpha = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$$

(答) $\alpha = \frac{\pi}{2}$

(4)

$\int_0^x \frac{1}{t^2+1} dt$ において $t = \tan \theta$ とおくと,

$t:0 \rightarrow x$ のとき $\theta:0 \rightarrow \beta$ (ただし β は $\tan \beta = x$ を満たす)

$$\frac{dt}{d\theta} = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

よって,

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{1}{t^2+1} dt &= \int_0^\beta \left(\frac{1}{\tan^2 \theta + 1} \times \frac{1}{\cos^2 \theta} \right) d\theta \\ &= \int_0^\beta 1 d\theta \\ &= \beta \end{aligned}$$

である。よって

$$\begin{aligned} x(\alpha - f(x)) &= \tan \beta \times \left(\frac{\pi}{2} - \beta \right) \\ &= \frac{\gamma}{\tan \gamma} \end{aligned}$$

ただし, $\frac{\pi}{2} - \beta = \gamma$ とおいた。

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \gamma = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\pi}{2} - \beta \right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0$$

であるから,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} x(\alpha - f(x)) &= \lim_{\gamma \rightarrow 0} \frac{\gamma}{\tan \gamma} \\ &= 1 \end{aligned}$$

(答) 1

(1)

 $P(x, y, z)$ とおくと,

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = (x-4, y, z)$$

$$\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OB} = (x, y-5, z)$$

と成分表示できる。また, UFOが見えた条件より, p, q を正の実数として

$$\overrightarrow{AP} = p(2, 3, 3)$$

$$\overrightarrow{BP} = q(6, -2, 3)$$

と表せる。したがって, それぞれの成分を比較して,

$$\begin{cases} x-4=2p \\ y=3p \\ z=3p \\ x=6q \\ y-5=-2q \\ z=3q \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (x, y, z, p, q) = (6, 3, 3, 1, 1)$$

を得る。これは p, q が正の実数という条件を満たす。(答) $P(6, 3, 3)$

(2)

UFO の 1 分あたりの変位, すなわち速度ベクトルを (a, b, c) とおくと,

$$(6, 3, 3) - (2, 0, 3) = 4(a, b, c)$$

$$\therefore (a, b, c) = \left(1, \frac{3}{4}, 0\right)$$

よって, 4 時 t 分における予測される位置は

$$(6, 3, 3) + t\left(1, \frac{3}{4}, 0\right) = \left(6+t, 3+\frac{3}{4}t, 3\right)$$

(答) $\left(6+t, 3+\frac{3}{4}t, 3\right)$

(3)

4 時 t 分における UFO の予測される位置座標と, 点 C との距離は

$$\sqrt{(5-t)^2 + \left(10 - \frac{3}{4}t\right)^2 + 1} = \sqrt{\frac{25}{16}(t-8)^2 + 26}$$

である。よって, $t=8$ のとき距離は最小となり, その値は $\sqrt{26}$ となる。

よって, R の座標は

$$\left(6+8, 3+\frac{3}{4} \cdot 8, 3\right) = (14, 9, 3)$$

(答) $(14, 9, 3)$

(4)

(3) より, UFO は 4 時 8 分に点 R に到着する。また, ヘリコプターは分速 1 で直進するので, 点 R までの距離 $\sqrt{26}$ を移動するのに $\sqrt{26} (>5)$ 分かかる。したがってヘリコプターの到着時刻は 4 時 8 分より遅くなるので, 先に到着するのは UFO である。

(答) UFO