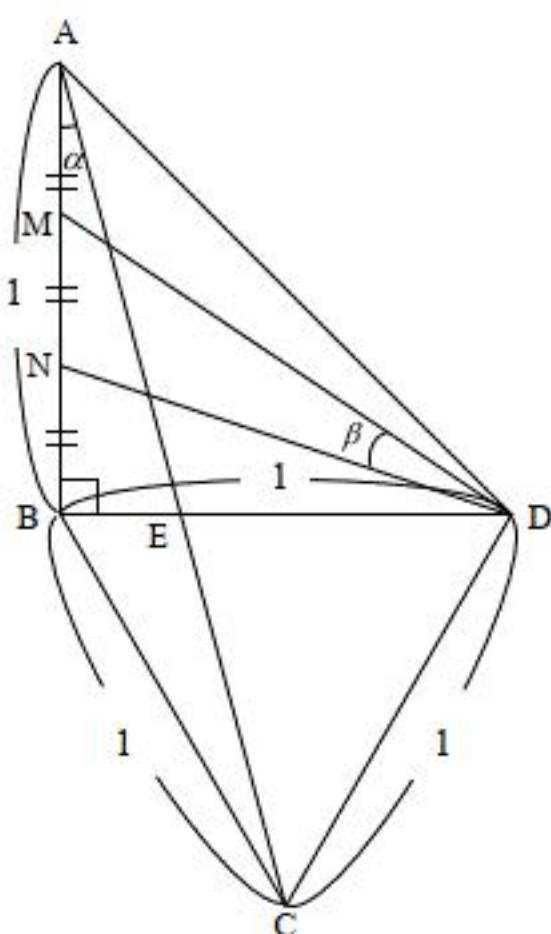


1



(1)

$BC = CD = DB = 1$ より、三角形 BCD は正三角形である。よって、

$$\angle DBC = \angle BCD = \angle CDB = \frac{\pi}{3} \quad \dots \textcircled{1}$$

である。

ここで、 $BE = x$ とおくと、 $DE = 1 - x$ である。三角形 BCE において余弦定理を用いると、

$$\begin{aligned} CE^2 &= BC^2 + BE^2 - 2BC \cdot BE \cdot \cos \angle CBE \\ &= 1 - x + x^2 \quad (\textcircled{1} \text{を用いた。}) \quad \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

となる。ここで、 $AB = BC = 1$ より、三角形 ABC は二等辺三角形であるが、

$$\angle ABC = \angle ABD + \angle DBC = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} = \frac{5}{6}\pi$$

なので、

$$\angle BAC = \angle BCA = \frac{1}{2} \left(\pi - \frac{5}{6}\pi \right) = \frac{\pi}{12}$$

である。よって、

$$\angle ACD = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4}$$

となる。ゆえに、三角形 CDE において正弦定理を用いると、

$$\begin{aligned} \frac{DE}{\sin \angle DCE} &= \frac{CE}{\sin \angle CDE} \\ \Leftrightarrow \frac{1-x}{\frac{1}{\sqrt{2}}} &= \frac{CE}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \\ \Leftrightarrow CE &= \sqrt{\frac{3}{2}} (1-x) \\ \Leftrightarrow CE^2 &= \frac{3}{2} (1-x)^2 \quad \dots \textcircled{3} \end{aligned}$$

となる。②、③より、

$$\begin{aligned} 1 - x + x^2 &= \frac{3}{2} (1-x)^2 \\ \Leftrightarrow x^2 - 4x + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= 2 \pm \sqrt{3} \end{aligned}$$

となる。 $0 < x < 1$ より、

$$x = 2 - \sqrt{3}$$

である。よって、線分の長さの比は

$$\begin{aligned} \frac{BE}{DE} &= \frac{2 - \sqrt{3}}{1 - (2 - \sqrt{3})} \\ &= \frac{2 - \sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1} \\ &= \frac{\sqrt{3} - 1}{2} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{BE}{DE} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$$

(2)

$AM = MN = NB = \frac{1}{3}$ より、

$$\tan \angle BDM = \frac{2}{3}, \tan \angle BDN = \frac{1}{3}$$

である。 $\beta = \angle BDM - \angle BDN$ であるから、

$$\begin{aligned} \tan \beta &= \tan (\angle BDM - \angle BDN) \\ &= \frac{\tan \angle BDM - \tan \angle BDN}{1 + \tan \angle BDM \cdot \tan \angle BDN} \\ &= \frac{\frac{2}{3} - \frac{1}{3}}{1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}} \\ &= \frac{3}{11} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{3}{11}$$

(3)

$\tan \alpha$ を求めると、

$$\begin{aligned} \tan \alpha &= \frac{BE}{AB} \\ &= 2 - \sqrt{3} \end{aligned}$$

である。 $\tan \alpha, \tan \beta$ の大小を比較すると、

$$\begin{aligned} \tan \beta - \tan \alpha &= \frac{3}{11} - (2 - \sqrt{3}) \\ &= \sqrt{3} - \frac{19}{11} \\ &= \frac{\sqrt{363} - \sqrt{361}}{11} > 0 \end{aligned}$$

より、 $\tan \beta > \tan \alpha > 0$ である。したがって、 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, 0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ なので、

$$\alpha < \beta$$

である。

$$(\text{答}) \quad \alpha < \beta$$

[2]

(1)

関数 $f(x)$ を x で微分すると、

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x - \frac{3}{2}x^2 \\ &= -\frac{3}{2}x(x-2) \end{aligned}$$

となり、増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$

(答) 前表

(2)

数学的帰納法で示す。

[1] $n=1$ のとき

$x_1=a$ であるが、 $1 < a < 2$ なので、 $1 < x_1 < 2$ が成り立つ。

[2] $n=k$ のとき

$1 < x_k < 2$ が成り立つことを仮定する。このとき、

$$x_{k+1} = f(x_k)$$

である。ここで、 $f(1)=1$ 、 $f(2)=2$ と(1)の結果から、 $1 < x < 2$ においては $1 < f(x) < 2$ である。よって、 $1 < x_k < 2$ より、

$$1 < f(x_k) < 2$$

が成り立つ。ゆえに、

$$1 < x_{k+1} < 2$$

が成り立つ。

[1], [2] より、すべての自然数 n に対して $1 < x_n < 2$ である。

(証明終)

(3)

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= f(x_n) - x_n \\ &= \frac{1}{2}(3x_n^2 - x_n^3) - x_n \\ &= -\frac{1}{2}x_n(x_n - 1)(x_n - 2) > 0 \quad (\because 1 < x_n < 2) \end{aligned}$$

よって、すべての自然数 n に対して $x_{n+1} > x_n$ である。

(証明終)

(4)

$$\begin{aligned} 2 - x_{n+1} &= 2 - \frac{1}{2}(3x_n^2 - x_n^3) \\ &= \frac{x_n^3 - 3x_n^2 + 4}{2} \\ &= \frac{(2 - x_n)(x_n + 1)}{2} \cdot (2 - x_n) \end{aligned}$$

であるから、 $1 < x_n < x_{n+1} < 2$ より、 $\frac{(2 - x_n)(x_n + 1)}{2} \leq b$ を満たす実数 b が存在すればよい。

$$\frac{(2 - x_n)(x_n + 1)}{2} = -\frac{1}{2}\left(x_n - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{8}$$

より、 $\frac{(2 - x_n)(x_n + 1)}{2}$ は $1 < x_n < 2$ の範囲では単調減少なので、

$$\frac{(2 - x_n)(x_n + 1)}{2} \leq \frac{(2 - x_1)(x_1 + 1)}{2}$$

が成り立つ。よって、

$$b = \frac{(2 - x_1)(x_1 + 1)}{2} = \frac{(2 - a)(a + 1)}{2}$$

のように b を定義すれば、不等式 $2 - x_{n+1} \leq b(2 - x_n)$ が成り立つ。また、

$$\frac{(2 - a)(a + 1)}{2} = -\frac{1}{2}\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{8}$$

と $1 < a < 2$ から、

$$0 < \frac{(2 - a)(a + 1)}{2} < 1$$

が成り立つ。ゆえに、不等式 $2 - x_{n+1} \leq b(2 - x_n)$ を満たす n に無関係な定数 b ($0 < b < 1$) が存在する。

(証明終)

(5)

(4)より、

$$\begin{aligned} 0 < 2 - x_n &\leq b(2 - x_{n-1}) \\ &\leq b^2(2 - x_{n-2}) \\ &\vdots \\ &\leq b^{n-1}(2 - a) \end{aligned}$$

となる。 $0 < b < 1$ より、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b^{n-1}(2 - a) = 0$$

なので、はさみうちの原理より、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (2 - x_n) = 0$$

すなわち

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 2$$

となり、数列 $\{x_n\}$ は収束し、その極限値は 2 である。

(答) 2

(1)

 C_1, C_2 の交点の x 座標は,

$$\sin 2x = k \cos x$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin x \cos x - k \cos x = 0$$

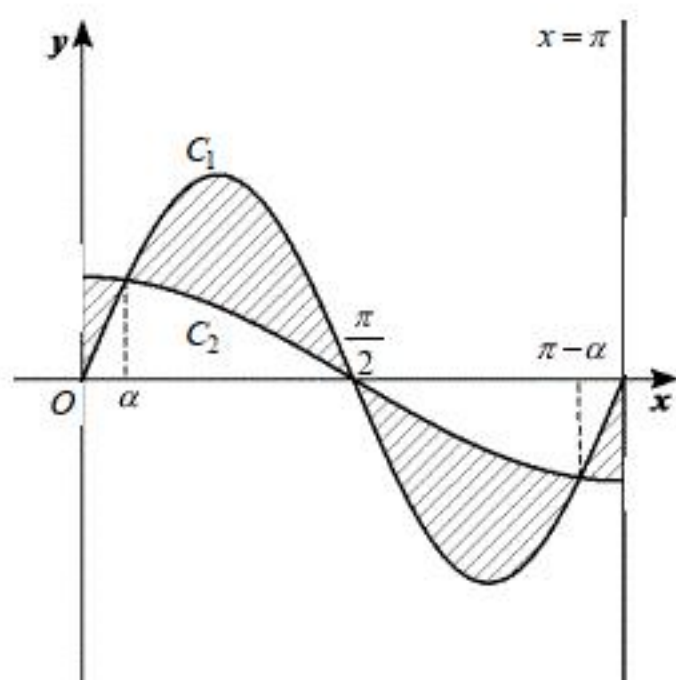
$$\Leftrightarrow \cos x (2 \sin x - k) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x = 0, \sin x = \frac{k}{2}$$

を満たす。 $0 < k < 2 \Leftrightarrow 0 < \frac{k}{2} < 1$ より, $\sin x = \frac{k}{2}$ を満たす x は $0 \leq x \leq \pi$ の範囲に 2 つ存在す

る。また, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ の範囲に存在する解を α とすると, もう 1 つの解は $\pi - \alpha$ である。

一方, $\cos x = 0$ を満たす解は $x = \frac{\pi}{2}$ である。よって C_1, C_2 のグラフは次図のようになる。



ここで,

$$\sin 2\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\sin 2\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$$

$$k \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -k \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$$

より, C_1, C_2 は点 $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ に関して点対称なので, $S(k)$ は

$$\begin{aligned} S(k) &= 2 \left\{ \int_0^\alpha (k \cos x - \sin 2x) dx + \int_\alpha^{\frac{\pi}{2}} (\sin 2x - k \cos x) dx \right\} \\ &= 2 \left[\left[k \sin x + \frac{1}{2} \cos 2x \right]_0^\alpha + \left[-\frac{1}{2} \cos 2x - k \sin x \right]_\alpha^{\frac{\pi}{2}} \right] \\ &= 4k \sin \alpha + 2 \cos 2\alpha - 2k \\ &= 4k \sin \alpha + 2(1 - 2 \sin^2 \alpha) - 2k \\ &= 4k \cdot \frac{k}{2} + 2 \left\{ 1 - 2 \left(\frac{k}{2} \right)^2 \right\} - 2k \\ &= k^2 - 2k + 2 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad S(k) = k^2 - 2k + 2$$

(2)

$$S(k) = k^2 - 2k + 2$$

$$= (k-1)^2 + 1$$

$0 < k < 2$ より, $S(k)$ の最小値は

$$S(1) = 1$$

である。

$$(\text{答}) \quad k=1 \text{ のとき最小値 } 1$$

4

(1)

関数 $f(x)$ を微分すると、

$$f'(x) = \frac{2-3\log x}{2x^2\sqrt{x}}$$

となるので増減は次の増減表のようになる。

x	(1)	...	$e^{\frac{2}{3}}$	...
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$		$\nearrow$	$\frac{2}{3e}$	$\searrow$

(答) 前表

(2)

[1] $t \neq e^{\frac{2}{3}}$ のとき

$y = f(x)$ の点 P における法線 l の方程式は

$$\begin{aligned} y &= -\frac{1}{f'(t)}(x-t) + f(t) \\ &= -\frac{2t^2\sqrt{t}}{2-3\log t}(x-t) + \frac{\log t}{t\sqrt{t}} \\ &= -\frac{2t^2\sqrt{t}}{2-3\log t}x + \frac{2t^3\sqrt{t}}{2-3\log t} + \frac{\log t}{t\sqrt{t}} \end{aligned}$$

である。

[2] $t = e^{\frac{2}{3}}$ のとき

$y = f(x)$ の点 P における法線 l の方程式は

$$x = e^{\frac{2}{3}}$$

である。

$$(答) \begin{cases} t \neq e^{\frac{2}{3}} \text{ のとき } y = -\frac{2t^2\sqrt{t}}{2-3\log t}x + \frac{2t^3\sqrt{t}}{2-3\log t} + \frac{\log t}{t\sqrt{t}} \\ t = e^{\frac{2}{3}} \text{ のとき } x = e^{\frac{2}{3}} \end{cases}$$

(3)

点 R の座標を $R(r, 0)$ とおく。また、点 Q の座標は $Q(t, 0)$ である。

[1] $t \neq e^{\frac{2}{3}}$ のとき

法線の方程式で $x = r, y = 0$ とすると、

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{2t^2\sqrt{t}}{2-3\log t}r + \frac{2t^3\sqrt{t}}{2-3\log t} + \frac{\log t}{t\sqrt{t}} \\ r &= t + \frac{\log t(2-3\log t)}{2t^4} \end{aligned}$$

となり、 $QR = |r - t|$ は、

$$|r - t| = \left| \frac{\log t(2-3\log t)}{2t^4} \right|$$

と表わされる。

[2] $t = e^{\frac{2}{3}}$ のとき

法線の方程式は $x = e^{\frac{2}{3}}$ なので、 $QR = 0$ ある。

[1], [2] より、

$$QR = \left| \frac{\log t(2-3\log t)}{2t^4} \right|$$

は全ての t について成り立つ。 $g(t) = \frac{\log t(2-3\log t)}{2t^4}$ ($t > 1$) とおくと、

$$\begin{aligned} g'(t) &= \frac{\frac{-3\log t + 2 - 3\log t}{t} \cdot t^4 - \{2\log t - 3(\log t)^2\} \cdot 4t^3}{2t^8} \\ &= \frac{2 - 6\log t - 8\log t + 12(\log t)^2}{2t^5} \\ &= \frac{6(\log t)^2 - 7\log t + 1}{t^5} \\ &= \frac{(6\log t - 1)(\log t - 1)}{t^5} \end{aligned}$$

となる。よって、増減表は次のようになる。

t	(1)	...	$e^{\frac{1}{6}}$	...	e	...
$g'(t)$		+	0	-	0	+
$g(t)$		$\nearrow$	$\frac{1}{8}e^{-\frac{2}{3}}$	$\searrow$	$-\frac{1}{2}e^{-4}$	$\nearrow$

$\lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ なので、 $QR = |g(t)|$ の最大値は $\frac{1}{8}e^{-\frac{2}{3}}$, $\frac{1}{2}e^{-4}$ のいずれかである。

$$\begin{aligned} \frac{\frac{1}{8}e^{-\frac{2}{3}}}{\frac{1}{2}e^{-4}} &= \frac{e^{\frac{10}{3}}}{4} > \frac{2^{\frac{10}{3}}}{4} > 1 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{8}e^{-\frac{2}{3}} &> \frac{1}{4}e^{-4} \end{aligned}$$

より、 $\frac{1}{8}e^{-\frac{2}{3}}$ が最大値である。

(答) $\frac{1}{8}e^{-\frac{2}{3}}$