

平成 22 年度

前 期 日 程

数 学 (120 分)

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
また、別冊の解答用紙についても同じです。
2. 問題は、1 ページから 4 ページまであります。解答用紙は、前 1，
前 2，前 3，前 4 の 4 枚からなっています。ページの脱落等に気付いたときは、手をあげて監督者に知らせなさい。
3. 解答はすべて、各問題の解答用紙の解答欄に記入しなさい。
なお、解答用紙の裏にも解答を記入する場合には、表と上下を逆にして記入しなさい。
4. 監督者の指示に従って、すべての解答用紙の該当欄に志望学科名及び受験番号
(2 か所)を記入しなさい。
5. 解答用紙の※を付した欄には、何も記入してはいけません。
6. 試験終了後、この問題冊子は持ち帰りなさい。

1

四角形 ABCD は次の条件を満たす。

(i) $AB = BC = CD = 1$

(ii) $BD = 1, \angle ABD = 90^\circ$

線分 AC と線分 BD との交点を E とする。線分 AB を 3 等分して、点 A に近い分点を M とし、点 B に近い分点を N とする。 $\angle CAB = \alpha$, $\angle MDN = \beta$ とおくとき、次の問いに答えよ。

(1) 線分の長さの比の値 $\frac{BE}{DE}$ を求めよ。

(2) $\tan \beta$ の値を求めよ。

(3) α と β の大小を判定せよ。

2 定数 a , 関数 $f(x)$, および数列 $\{x_n\}$ を次のように定める。

$$1 < a < 2, \quad f(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - x^3) \\ x_1 = a, \quad x_{n+1} = f(x_n) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

- (1) 関数 $f(x)$ の増減を調べよ。
- (2) すべての自然数 n に対して $1 < x_n < 2$ を示せ。
- (3) すべての自然数 n に対して $x_{n+1} > x_n$ を示せ。
- (4) 次の不等式を満たす n に無関係な定数 b ($0 < b < 1$) があることを示せ。
$$2 - x_{n+1} \leq b(2 - x_n) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$
- (5) 数列 $\{x_n\}$ が収束することを示し、その極限値を求めよ。

3実数 k を $0 < k < 2$ とし, 2 曲線

$$C_1: y = \sin 2x \quad (0 \leq x \leq \pi)$$

$$C_2: y = k \cos x \quad (0 \leq x \leq \pi)$$

を考える。 C_1 と C_2 および 2 直線 $x = 0$, $x = \pi$ で囲まれた 4 つの部分の面積の和を $S(k)$ とする。

- (1) $S(k)$ を求めよ。
- (2) $S(k)$ の最小値とそのときの k を求めよ。

4

関数 $f(x) = \frac{\log x}{x\sqrt{x}}$ ($x > 1$) に対して次の問いに答えよ。必要ならば、自然対数の底 e の値は $2 < e < 3$ であることを用いてよい。

- (1) 関数 $f(x)$ の増減を調べよ。
- (2) 曲線 $y = f(x)$ 上の点 $P(t, f(t))$ における法線 ℓ の方程式を求めよ。
- (3) 点 P から x 軸に下ろした垂線を PQ とする。(2)で求めた法線 ℓ と x 軸との交点を R とする。2点 Q, R の距離の最大値を求めよ。