

1

(1)

対数微分法により

$$\begin{aligned}\log g(x) &= 3\log(x+1) - 2\log x \\ \Rightarrow \frac{g'(x)}{g(x)} &= \frac{3}{x+1} - \frac{2}{x} = \frac{x-2}{x(x+1)} \\ \therefore g'(x) &= g(x) \cdot \frac{x-2}{x(x+1)} = \frac{(x+1)^2(x-2)}{x^3}\end{aligned}$$

となる。よって $x > 0$ における増減表は次のようになる。

x	(0)	...	2	...
$g'(x)$		-	0	+
$g(x)$		$\searrow$	$\frac{27}{4}$	$\nearrow$

したがって、 $g(x)$ は $0 < x < 2$ で単調減少、 $2 \leq x$ で単調増加する。

(答) $0 < x < 2$ で単調減少、 $2 \leq x$ で単調増加

(2)

$f'(x)$ に符号変化があるように k を定めればよい。

$$\begin{aligned}f'(x) &= -\frac{1}{x^2} + \frac{2k}{(x+1)^3} \\ &= -\frac{1}{(x+1)^3} \{g(x) - 2k\}\end{aligned}$$

と表せる。これと、

$$\lim_{x \rightarrow +0} g(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1) \left(1 + \frac{1}{x}\right)^2 = +\infty$$

であること、また(1)より $g(x)$ の最小値は $\frac{27}{4}$ であることから、求める条件は

$$\frac{27}{4} < 2k \quad \therefore k > \frac{27}{8}$$

となる。

(答) $k > \frac{27}{8}$

(3)

(2)より、 $x = a$ において、

$$\begin{aligned}f'(a) &= 0 \\ \Leftrightarrow g(a) &= 2k \\ \Leftrightarrow k &= \frac{1}{2}g(a) = \frac{(a+1)^3}{2a^2}\end{aligned}$$

が成り立つ。したがって、

$$\begin{aligned}f(a) &= \frac{1}{a} - \frac{k}{(a+1)^2} \\ &= \frac{1}{a} - \frac{a+1}{2a^2} \\ &= \frac{a-1}{2a^2}\end{aligned}$$

と求まる。

(答) $\frac{a-1}{2a^2}$

(4)

$$k = \frac{(a+1)^3}{2a^2} = \frac{1}{2}g(a), \quad \frac{27}{8} = \frac{1}{2}g(2)$$

であることと(1)より、 $a > 0$ において

$$k > \frac{27}{8} \Leftrightarrow a \neq 2$$

が成り立つ。 $a \neq 2$ のとき、

$$\begin{aligned}\frac{1}{8} - \frac{a-1}{2a^2} &= \frac{a^2 - 4(a-1)}{8a^2} \\ &= \frac{(a-2)^2}{8a^2} \\ &> 0\end{aligned}$$

であるから、 $k > \frac{27}{8}$ のとき、 $f(x)$ の極値、とくに極大値が $\frac{1}{8}$ より小さいことが示された。

(証明終)

(1)

どれか1つのコインが3回反転し、残り2枚のコインが1回ずつ反転すればよい。どのコインが3回反転するかで3通りあることから、反復試行の確率を考えて、求める確率は

$$3 \cdot \frac{5!}{3!1!1!} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{20}{81}$$

となる。

(答) $\frac{20}{81}$

(2)

$N=0, 1, 2, 3$ に対し、状態 N を

大中小3枚のコインのうち、 N 枚が裏の状態

とする。コインを1回投げるごとに各状態から別の状態へ移る確率は以下のとおりである。

状態の変化			確率
状態0	→	状態1	1
状態1	→	状態0	$\frac{1}{3}$
	→	状態2	$\frac{2}{3}$
状態2	→	状態1	$\frac{2}{3}$
	→	状態3	$\frac{1}{3}$
状態3	→	状態2	1

題意の「5回投げて初めて3枚とも裏」というのは、

状態0→状態1→状態0→状態1→状態2→状態3

状態0→状態1→状態2→状態1→状態2→状態3

という2つの場合であるから、求める確率は、

$$1 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{14}{81}$$

となる。

(答) $\frac{14}{81}$

(3)

どのコインについても表から裏になるには、奇数回の反転が必要だから、最初の状態から状態3になるとき、それまでにコインを投げた回数 n は3以上の奇数である。そこで $n=2k+1$ (k は自然数)とおける。

また、(2)と同様に考えれば、最初の状態を除いて状態0になることなく、 n 回目で初めて状態3になるのは、

状態0→状態1→(状態2→状態1→)⋯→(状態2→状態1→)状態2→状態3

のように、「状態2→状態1→」を $k-1$ 回繰り返すときである。

したがって、奇数 $n=2k+1$ に対し、最初を除き状態0になることなく、 n 回投げて初めて状態3になる確率は

$$1 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}\right)^{k-1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{9} \left(\frac{4}{9}\right)^{k-1}$$

となる。したがって、求める確率は、これをすべての自然数 k について足し合わせたものと考え

ることができるので、 $-1 < \frac{4}{9} < 1$ に注意して、

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{9} \left(\frac{4}{9}\right)^{k-1} = \frac{\frac{2}{9}}{1 - \frac{4}{9}} = \frac{2}{5}$$

と求まる。

(答) $\frac{2}{5}$

A は逆行列

$$A^{-1} = \frac{1}{-a^2-1} \begin{pmatrix} -a & -1 \\ -1 & a \end{pmatrix} = \frac{1}{a^2+1} \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & -a \end{pmatrix}$$

をもつ。したがって、点 (x, y) の f による像を (X, Y) とすれば、定義より、

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} &= A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= A^{-1} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \frac{1}{a^2+1} \begin{pmatrix} aX+Y \\ X-aY \end{pmatrix} \quad \dots\dots ① \end{aligned}$$

が成り立つ。

- (1) ℓ_1 上の点は $x=-1$ を満たすから、①より、 ℓ_2 上の点 (X, Y) は

$$-1 = \frac{aX+Y}{a^2+1} \Leftrightarrow aX+Y+a^2+1=0$$

を満たす。したがって求める方程式は、 $ax+y+a^2+1=0$ となる。

(答) $ax+y+a^2+1=0$

- (2) 同様に、①を C_1 の方程式に代入すると、

$$\begin{aligned} \left(\frac{aX+Y}{a^2+1} - 1 \right)^2 + \left(\frac{X-aY}{a^2+1} - 1 \right)^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow \left(\frac{aX+Y}{a^2+1} \right)^2 - 2 \left(\frac{aX+Y}{a^2+1} \right) + 1 + \left(\frac{X-aY}{a^2+1} \right)^2 - 2 \left(\frac{X-aY}{a^2+1} \right) + 1 &= 1 \\ \Leftrightarrow (aX+Y)^2 + (X-aY)^2 - 2(1+a)(a^2+1)X - 2(1-a)(a^2+1)Y + 2(a^2+1)^2 &= (a^2+1)^2 \\ \Leftrightarrow (X-a-1)^2 + (Y+a-1)^2 &= a^2+1 \end{aligned}$$

となるので、求める方程式は、 $(x-a-1)^2 + (y+a-1)^2 = a^2+1$ となる。

(答) $(x-a-1)^2 + (y+a-1)^2 = a^2+1$

- (3)
$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1 \quad \dots\dots ②$$
- $$(x-a-1)^2 + (y+a-1)^2 = a^2+1 \quad \dots\dots ③$$

の辺々を引くと、

$$\begin{aligned} -2x+1-2y+1+2(1+a)x-(1+a)^2+2(1-a)y-(1-a)^2 &= -a^2 \\ \Leftrightarrow a(2x-2y-a) &= 0 \end{aligned}$$

となる。 $a=0$ とすると、円 C_1 と円 C_2 は一致してしまうので不適であるため、 C_1 と C_2 の交点は、円 C_1 と直線

$$2x-2y-a=0 \quad \dots\dots ④$$

の交点として求まる。④より $y=x-\frac{1}{2}a$ であるから、これを②に代入し、

$$\begin{aligned} (x-1)^2 + \left(x - \frac{1}{2}a - 1 \right)^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow 2x^2 - (a+4)x + \frac{1}{4}a^2 + a + 1 &= 0 \quad \dots\dots ⑤ \end{aligned}$$

の解が共有点の x 座標となる。ゆえに方程式⑤が重解をもつような a を求めればよく、判別式を D とすると、

$$\begin{aligned} D &= (a+4)^2 - 4 \cdot 2 \cdot \left(\frac{1}{4}a^2 + a + 1 \right) \\ &= -a^2 + 8 \\ &= 0 \\ \therefore a &= \pm 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

となる。それぞれの場合に共有点を求めると、

$$\begin{aligned} a=2\sqrt{2} \text{ のとき, } &\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}, \frac{2-\sqrt{2}}{2} \right) \\ a=-2\sqrt{2} \text{ のとき, } &\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}, \frac{2+\sqrt{2}}{2} \right) \end{aligned}$$

となる。

$$(答) \begin{cases} a=2\sqrt{2} \text{ のとき, 共有点 } \left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}, \frac{2-\sqrt{2}}{2} \right) \\ a=-2\sqrt{2} \text{ のとき, 共有点 } \left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}, \frac{2+\sqrt{2}}{2} \right) \end{cases}$$

(1)

 C_1 について,

$$y' = \frac{4x(x^2+1) - 2x^2 \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{4x}{(x^2+1)^2}$$

であり, C_2 について,

$$y' = \frac{1}{2} \cdot (-2x) \cdot \frac{1}{\sqrt{r^2 - x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}} \quad (-r < x < r)$$

となる。 C_1 は $(\pm r, 0)$ を通らないため, この点における C_2 の接線は考えなくてよい。よって, 共有点の x 座標を t とすれば, y 座標と接線の傾きについて

$$\frac{2t^2}{t^2+1} = \sqrt{r^2 - t^2} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\frac{4t}{(t^2+1)^2} \cdot \left(-\frac{t}{\sqrt{r^2 - t^2}} \right) = -1 \quad \dots \textcircled{2}$$

が得られる。 $t=0$ のとき, ①を満たす $r>0$ は存在しない。そこで, ①の両辺の逆数を取り, ②に代入して r を消去すると,

$$\begin{aligned} \frac{4t}{(t^2+1)^2} \cdot \left(-\frac{t^2+1}{2t} \right) &= -1 \\ \Leftrightarrow 2 &= t^2+1 \\ \Leftrightarrow t &= \pm 1 \end{aligned}$$

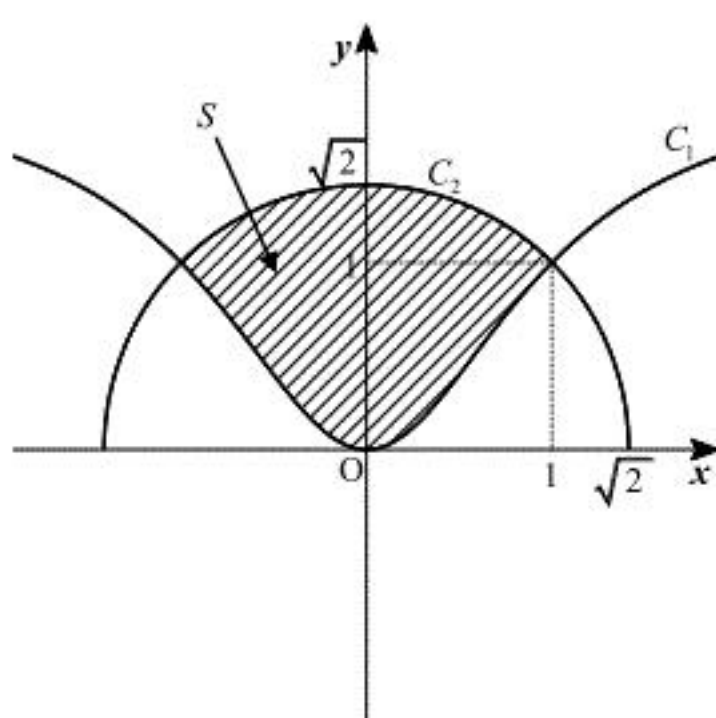
となる。これを①に代入し,

$$\sqrt{r^2 - 1} = 1 \Leftrightarrow r = \sqrt{2} \quad (\because r > 0)$$

と求まる。

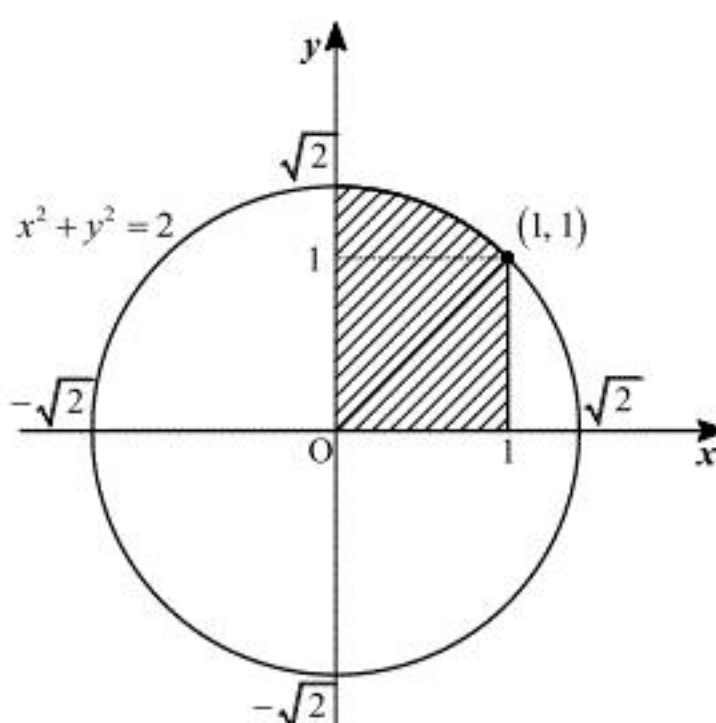
また, $t=\pm 1$ のとき, C_1 の y 座標は1であるから, 共有点の座標は $(\pm 1, 1)$ となる。(答) 共有点の座標: $(\pm 1, 1)$, $r = \sqrt{2}$

(2)

 C_1, C_2 のグラフの概形は次のようになり, 求める面積 S は図の斜線部の面積である。

よって, 2つのグラフとも偶関数であることに注意して計算すると,

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^1 \left(\sqrt{2-x^2} - \frac{2x^2}{x^2+1} \right) dx \\ &= 2 \int_0^1 \left(\sqrt{2-x^2} - \frac{2x^2}{x^2+1} \right) dx \\ &= 2 \int_0^1 \sqrt{2-x^2} dx - 4 \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{x^2+1} \right) dx \\ &= 2 \int_0^1 \sqrt{2-x^2} dx + 4 \int_0^1 \frac{1}{x^2+1} dx - 4 \end{aligned}$$

となる。ここで, $\int_0^1 \sqrt{2-x^2} dx$ は次図斜線部の面積であることから,

$$\int_0^1 \sqrt{2-x^2} dx = \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{2})^2 \cdot \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$$

となる。また, $\int_0^1 \frac{1}{x^2+1} dx$ は $x = \tan \theta$ と置換すれば, $dx = \frac{d\theta}{\cos^2 \theta}$ であり,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{x^2+1} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 \theta \cdot \frac{d\theta}{\cos^2 \theta} \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \\ &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

となる。したがって,

$$\begin{aligned} S &= 2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \right) + 4 \cdot \frac{\pi}{4} - 4 \\ &= \frac{3}{2} \pi - 3 \end{aligned}$$

と求まる。

(答) $S = \frac{3}{2} \pi - 3$