

(1)

$$f(x) = x^3 - (1 + 2\cos\theta)x^2 + (1 + 2\cos\theta)x - 1$$

$$= (x-1)(x^2 - 2\cos\theta \cdot x + 1)$$

のように変形できるので、 $h(x) = x^2 - (2\cos\theta)x + 1$ において、方程式 $h(x) = 0$ が実数解をもつかどうかを考える。 $h(x) = 0$ の判別式を D_1 とすると

$$\frac{D_1}{4} = \cos^2\theta - 1 = (\cos\theta - 1)(\cos\theta + 1)$$

であるから、

[1] $\cos\theta = 1 \Leftrightarrow \theta = 0$ のとき

$D_1 = 0$ となり、2 次方程式 $h(x) = 0$ は重解 $x = 1$ をもつ。

[2] $\cos\theta = -1 \Leftrightarrow \theta = \pi$ のとき

$D_1 = 0$ となり、2 次方程式 $h(x) = 0$ は重解 $x = -1$ をもつ。

[3] $-1 < \cos\theta < 1 \Leftrightarrow 0 < \theta < \pi, \pi < \theta < 2\pi$ のとき

$D_1 < 0$ より、2 次方程式 $h(x) = 0$ は実数解をもたない。

以上、[1], [2], [3] より、方程式 $f(x) = 0$ の実数解は、

$$\begin{cases} 1 & (0 \leq \theta < \pi, \pi < \theta \leq 2\pi \text{ のとき}) \\ 1, -1 & (\theta = \pi \text{ のとき}) \end{cases}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \begin{cases} 1 & (0 \leq \theta < \pi, \pi < \theta \leq 2\pi \text{ のとき}) \\ 1, -1 & (\theta = \pi \text{ のとき}) \end{cases}$$

(2)

関数 $f(x)$ が極値をもつためには、 $f'(x)$ が符号変化をすること、すなわち、方程式 $f'(x) = 0$ が異なる 2 つの実数解をもつことが必要かつ十分である。

$$f'(x) = 3x^2 - 2(1 + 2\cos\theta)x + 1 + 2\cos\theta$$

より、 $f'(x) = 0$ の判別式を D_2 とすると、

$$\frac{D_2}{4} = (1 + 2\cos\theta)^2 - 3(1 + 2\cos\theta)$$

$$= 2(1 + 2\cos\theta)(\cos\theta - 1)$$

である。よって、 $f(x)$ が極値をもつための条件は

$$D_2 > 0$$

$$\Leftrightarrow (1 + 2\cos\theta)(\cos\theta - 1) > 0$$

$$\Leftrightarrow -1 \leq \cos\theta < -\frac{1}{2}$$

であるから、求める条件は

$$\frac{2}{3}\pi < \theta < \frac{4}{3}\pi$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{2}{3}\pi < \theta < \frac{4}{3}\pi$$

(3)

$$f''(x) = 6x - 2(1 + 2\cos\theta)$$

であるから、 $f''(x) = 0$ となるのは $x = \frac{1}{3}(1 + 2\cos\theta)$ のときである。この前後で $f''(x)$ の符号

は負から正に変化するので、変曲点の x 座標は

$$g(\theta) = \frac{1}{3}(1 + 2\cos\theta)$$

である。よって、 $g(\theta)$ は

$$\theta = 0 \text{ のとき最大値 } 1, \theta = \pi \text{ のとき最小値 } -\frac{1}{3}$$

をとる。

$$(\text{答}) \quad \theta = 0 \text{ のとき最大値 } 1, \theta = \pi \text{ のとき最小値 } -\frac{1}{3}$$

(1)

$$f(x) = (4x^3 - 5x)e^{-x^2}$$

を x で微分すると

$$\begin{aligned} f'(x) &= (12x^2 - 5)e^{-x^2} + (4x^3 - 5x)(-2x)e^{-x^2} \\ &= (-8x^4 + 22x^2 - 5)e^{-x^2} \\ &= -(4x^2 - 1)(2x^2 - 5)e^{-x^2} \end{aligned}$$

となるから、 $f(x)$ の増減は下表のようになる。

x	...	$-\frac{\sqrt{10}}{2}$	...	$-\frac{1}{2}$	...	$\frac{1}{2}$	...	$\frac{\sqrt{10}}{2}$	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+	0	-
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

よって、極値は

$$\begin{cases} \text{極大値: } f\left(-\frac{1}{2}\right) = 2e^{-\frac{1}{4}}, f\left(\frac{\sqrt{10}}{2}\right) = \frac{5\sqrt{10}}{2}e^{-\frac{5}{2}} \\ \text{極小値: } f\left(-\frac{\sqrt{10}}{2}\right) = -\frac{5\sqrt{10}}{2}e^{-\frac{5}{2}}, f\left(\frac{1}{2}\right) = -2e^{-\frac{1}{4}} \end{cases}$$

である。

$$(\text{答}) \begin{cases} \text{極大値: } f\left(-\frac{1}{2}\right) = 2e^{-\frac{1}{4}}, f\left(\frac{\sqrt{10}}{2}\right) = \frac{5\sqrt{10}}{2}e^{-\frac{5}{2}} \\ \text{極小値: } f\left(-\frac{\sqrt{10}}{2}\right) = -\frac{5\sqrt{10}}{2}e^{-\frac{5}{2}}, f\left(\frac{1}{2}\right) = -2e^{-\frac{1}{4}} \end{cases}$$

(2)

点 $(t, f(t))$ における曲線 $y = f(x)$ の接線は

$$\begin{aligned} y - f(t) &= f'(t)(x - t) \\ \Leftrightarrow y - (4t^3 - 5t)e^{-t^2} &= -(4t^2 - 1)(2t^2 - 5)e^{-t^2}(x - t) \\ \Leftrightarrow y &= -(4t^2 - 1)(2t^2 - 5)e^{-t^2}x + 2t^3(4t^2 - 9)e^{-t^2} \end{aligned}$$

と表せる。これが原点を通るとき

$$\begin{aligned} 0 &= 2t^3(4t^2 - 9)e^{-t^2} \\ \therefore t &= 0, \pm\frac{3}{2} \end{aligned}$$

が成り立つ。ここで、

$$\begin{aligned} f'(0) &= -5 (< 0) \\ f'\left(\pm\frac{3}{2}\right) &= 4e^{-\frac{9}{4}} (> 0) \end{aligned}$$

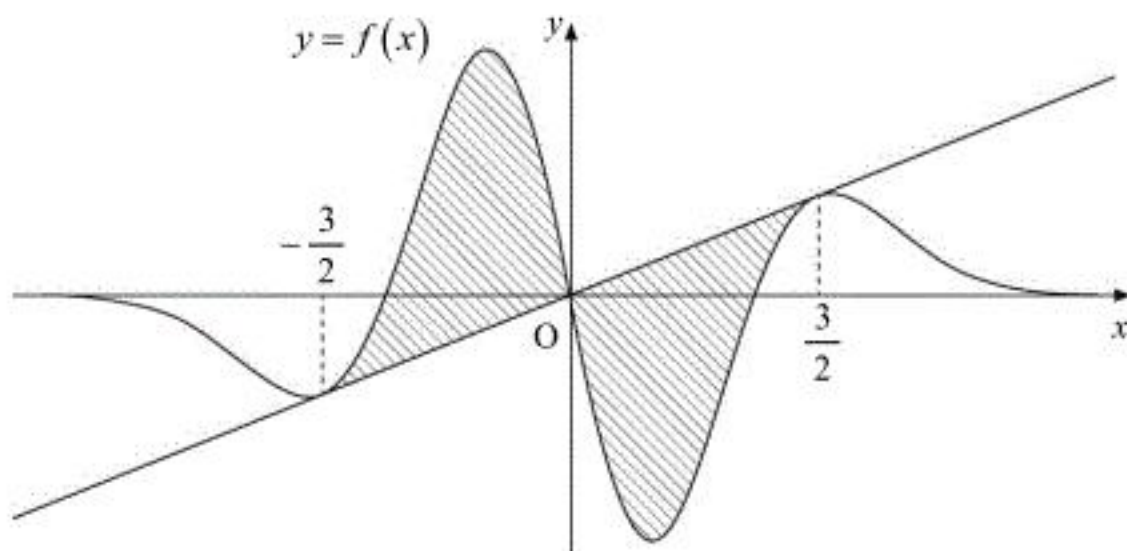
であるから、求める接線の方程式は

$$y = 4e^{-\frac{9}{4}}x$$

である。

$$(\text{答}) y = 4e^{-\frac{9}{4}}x$$

(3)



グラフの概形は上図のようになるから、曲線 $y = f(x)$ とその接線で囲まれる領域は上図の斜線部になる。求める面積の和を S とすると、 $f(x)$ と接線がともに奇関数であることから

$$S = 2 \int_0^{\frac{3}{2}} \left\{ 4e^{-\frac{9}{4}}x - (4x^3 - 5x)e^{-x^2} \right\} dx$$

と表される。ここで、 $t = x^2$ という変数変換を考えると、

$$dt = 2xdx, \quad \begin{array}{c|c} x & 0 \rightarrow \frac{3}{2} \\ \hline t & 0 \rightarrow \frac{9}{4} \end{array}$$

となるので、

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\frac{3}{2}} \left\{ 4e^{-\frac{9}{4}} - (4x^2 - 5)e^{-x^2} \right\} \cdot 2xdx \\ &= \int_0^{\frac{9}{4}} \left\{ 4e^{-\frac{9}{4}} - (4t - 5)e^{-t} \right\} dt \\ &= 4e^{-\frac{9}{4}} \left[t \right]_0^{\frac{9}{4}} - \left\{ \left[-(4t - 5)e^{-t} \right]_0^{\frac{9}{4}} + \int_0^{\frac{9}{4}} 4e^{-t} dt \right\} \\ &= 9e^{-\frac{9}{4}} - \left\{ -4e^{-\frac{9}{4}} - 5 + \left[-4e^{-t} \right]_0^{\frac{9}{4}} \right\} \\ &= 13e^{-\frac{9}{4}} + 5 - \left\{ -4e^{-\frac{9}{4}} + 4 \right\} \\ &= 17e^{-\frac{9}{4}} + 1 \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) 17e^{-\frac{9}{4}} + 1$$

(1)

$(ax+b)^n$ を x^2+1 で割ったときの商を $Q_n(x)$ とおくと,

$$(ax+b)^n = (x^2+1)Q_n(x) + a_nx + b_n$$

と表せる。このとき,

$$\begin{aligned}(ax+b)^{n+1} &= (ax+b)\{(x^2+1)Q_n(x) + a_nx + b_n\} \\ &= (x^2+1)\{(ax+b)Q_n(x) + aa_n\} + (ba_n + ab_n)x - aa_n + bb_n\end{aligned}$$

と表せることから,

$$\begin{cases} a_{n+1} = ba_n + ab_n \\ b_{n+1} = -aa_n + bb_n \end{cases}$$

である。よって

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$$

を満たす行列 A は

$$A = \begin{pmatrix} b & a \\ -a & b \end{pmatrix}$$

である。

$$(\text{答}) \quad A = \begin{pmatrix} b & a \\ -a & b \end{pmatrix}$$

(2)

行列 A にケーリー・ハミルトンの公式を適用すると

$$A^2 - 2bA + (a^2 + b^2)E = O$$

である。この式を

$$A^2 + pA + qE = O$$

から辺々引いて

$$(p+2b)A + \{q - (a^2 + b^2)\}E = O$$

が得られる。 $a \neq 0$ より A は E の定数倍でないから,

$$p+2b=0$$

でなければならない。このとき, $q - (a^2 + b^2) = 0$ であり, したがって,

$$p = -2b, \quad q = a^2 + b^2$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad p = -2b, \quad q = a^2 + b^2$$

(3)

(2)より, 定積分は

$$\begin{aligned}I_{n+2} + pI_{n+1} + qI_n &= \int_0^1 \frac{(ax+b)^{n+2}}{x^2+1} dx - 2b \int_0^1 \frac{(ax+b)^{n+1}}{x^2+1} dx + (a^2+b^2) \int_0^1 \frac{(ax+b)^n}{x^2+1} dx \\ &= \int_0^1 \frac{(ax+b)^{n+2} - 2b(ax+b)^{n+1} + (a^2+b^2)(ax+b)^n}{x^2+1} dx \\ &= \int_0^1 \frac{\{(ax+b)^2 - 2b(ax+b) + (a^2+b^2)\}(ax+b)^n}{x^2+1} dx \\ &= \int_0^1 \frac{a^2(x^2+1)(ax+b)^n}{x^2+1} dx \\ &= a^2 \int_0^1 (ax+b)^n dx \\ &= a^2 \left[\frac{1}{a(n+1)} (ax+b)^{n+1} \right]_0^1 \\ &= \frac{a}{n+1} \{(a+b)^{n+1} - b^{n+1}\}\end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad \frac{a}{n+1} \{(a+b)^{n+1} - b^{n+1}\}$$

(4)

$a=1, b=-1$ のとき, (3)より,

$$\begin{aligned}I_{n+2} + 2I_{n+1} + 2I_n &= \frac{1}{n+1} \{ -(-1)^{n+1} \} \\ \therefore I_{n+2} &= -2I_{n+1} - 2I_n + \frac{(-1)^n}{n+1}\end{aligned}$$

が成り立つ。これを繰り返し用いると

$$\begin{aligned}I_5 &= -2I_4 - 2I_3 - \frac{1}{4} \\ &= -2 \left(-2I_3 - 2I_2 + \frac{1}{3} \right) - 2I_3 - \frac{1}{4} \\ &= 2I_3 + 4I_2 - \frac{11}{12} \\ &= 2 \left(-2I_2 - 2I_1 - \frac{1}{2} \right) + 4I_2 - \frac{11}{12} \\ &= -4I_1 - \frac{23}{12}\end{aligned}$$

が得られる。 I_1 については,

$$\begin{aligned}I_1 &= \int_0^1 \frac{x-1}{x^2+1} dx \\ &= \int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx - \int_0^1 \frac{1}{x^2+1} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{(x^2+1)'}{x^2+1} dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\tan^2 \theta + 1} \cdot \frac{d\theta}{\cos^2 \theta} \\ &= \frac{1}{2} \left[\log(x^2+1) \right]_0^1 - [\theta]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{1}{2} \log 2 - \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

と求めることができる。ここで, 第2項の積分では $x = \tan \theta$ と置換して,

$$dx = \frac{d\theta}{\cos^2 \theta}, \quad \begin{array}{c|cc} x & 0 & \rightarrow & 1 \\ \theta & 0 & \rightarrow & \frac{\pi}{4} \end{array}$$

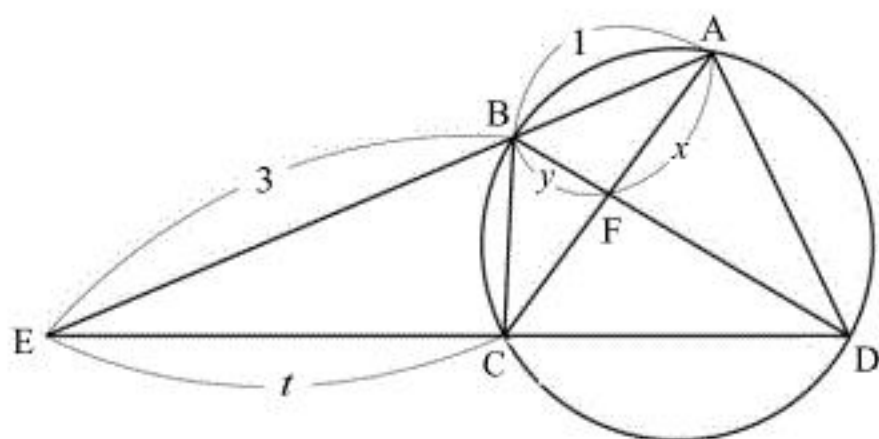
であることを用いた。

以上により, 求める値は

$$\begin{aligned}I_5 &= -4 \left(\frac{1}{2} \log 2 - \frac{\pi}{4} \right) - \frac{23}{12} \\ &= -2 \log 2 + \pi - \frac{23}{12}\end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad I_5 = -2 \log 2 + \pi - \frac{23}{12}$$



(1)

$\triangle DCF \sim \triangle ABF$ であり, $\triangle DCF : \triangle ABF = 4:1$ なので, これらの相似比は $2:1$ である。よって,

$$FC = 2FB = 2y$$

$$FD = 2FA = 2x$$

である。

(答) $FC = 2y, FD = 2x$

(2)

$CD = 2$ であり, 方べきの定理より,

$$EC \cdot ED = EB \cdot EA$$

$$\Leftrightarrow t(t+2) = 3 \cdot 4$$

$$\Leftrightarrow t^2 + 2t - 12 = 0$$

が成り立つが, $t > 0$ より

$$t = -1 + \sqrt{13}$$

である。

(答) $t = -1 + \sqrt{13}$

(3)

$\triangle FBC \sim \triangle FAD$ より

$$u = \frac{y}{x} = \frac{FB}{FA} = \frac{BC}{AD}$$

である。さらに, $\triangle EBC \sim \triangle EDA$ より

$$\frac{BC}{AD} = \frac{EC}{EA} = \frac{-1 + \sqrt{13}}{4}$$

である。以上より,

$$u = \frac{-1 + \sqrt{13}}{4}$$

と求まる。

(答) $u = \frac{-1 + \sqrt{13}}{4}$

(4)

$$\triangle ABF = \triangle AED \times \frac{AB}{AE} \times \frac{FB}{BD}$$

$$= \triangle AED \times \frac{1}{4} \times \frac{y}{2x+y}$$

であるから, 求める面積の比は

$$\begin{aligned} 4 \cdot \frac{2x+y}{y} &= 4 \left(\frac{2}{u} + 1 \right) \\ &= 4 \left(\frac{8}{-1 + \sqrt{13}} + 1 \right) \\ &= \frac{8\sqrt{13} + 20}{3} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{8\sqrt{13} + 20}{3}$