

1

(1)

$f(x)$ の微分を求めると、

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{x^2+1} = \frac{1-x}{(x+1)(x^2+1)}$$

となり、よって増減表は以下のようになる。

x	-1	...	1	...
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$		↗	極大	↘

増減表より、 $x=1$ のとき、極大値 $\frac{1}{2} \log 2$ をとる。

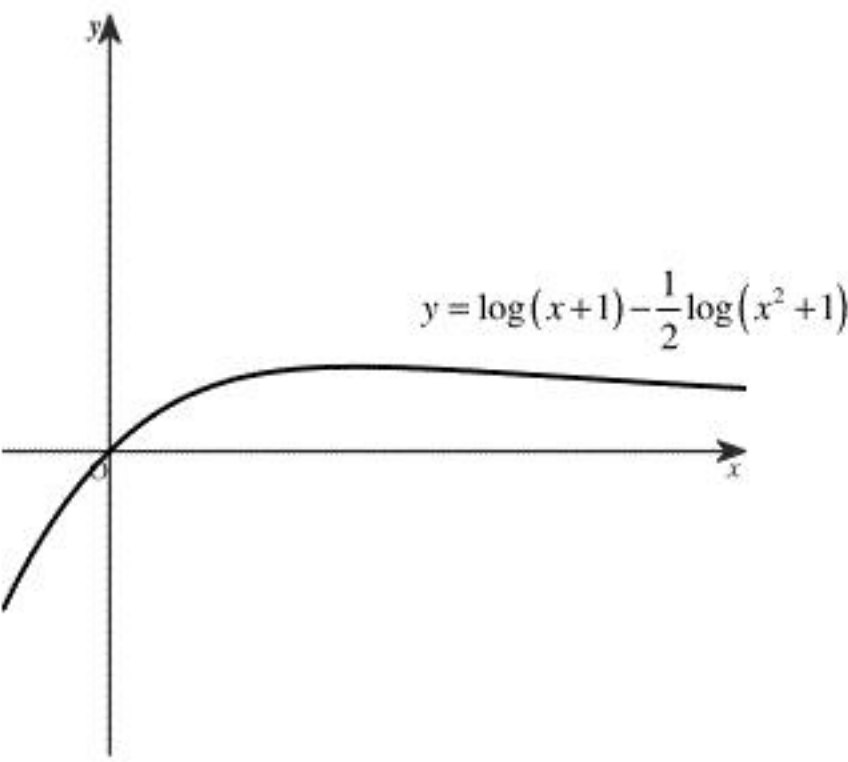
(答) 極大値: $\frac{1}{2} \log 2$, 極小値: なし

(2)

$$\lim_{x \rightarrow -1+0} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \log \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \log \frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \log 1 = 0$$

である。これと(1)で求めた増減表より、 $y=f(x)$ を図示すると下図のようになる。



したがって、上図より方程式 $f(x)=k$ の相違なる実数解の個数は

$$\begin{cases} k \leq 0, & k = \frac{1}{2} \log 2 \text{ のとき, } 1 \text{ 個} \\ 0 < k < \frac{1}{2} \log 2 \text{ のとき, } 2 \text{ 個} \\ k > \frac{1}{2} \log 2 \text{ のとき, } 0 \text{ 個} \end{cases}$$

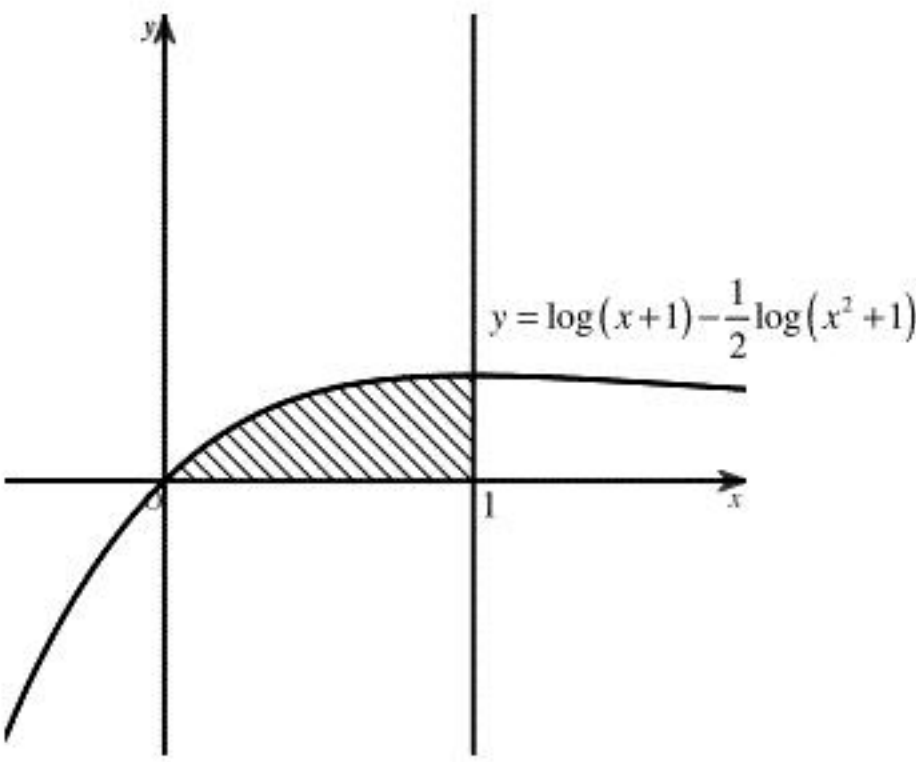
となる。

$$(答) \begin{cases} k \leq 0, & k = \frac{1}{2} \log 2 \text{ のとき, } 1 \text{ 個} \\ 0 < k < \frac{1}{2} \log 2 \text{ のとき, } 2 \text{ 個} \\ k > \frac{1}{2} \log 2 \text{ のとき, } 0 \text{ 個} \end{cases}$$

(3)

$$f(0) = \log 1 - \frac{1}{2} \log 1 = 0$$

となるので、面積を求める部分は下図の斜線部のようになる。



したがって、求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 f(x) dx \\ &= \int_0^1 \log(x+1) dx - \frac{1}{2} \int_0^1 \log(x^2+1) dx \end{aligned}$$

と表せる。

$$\begin{aligned} \int_0^1 \log(x+1) dx &= [(x+1) \log(x+1) - x]_0^1 \\ &= 2 \log 2 - 1 \end{aligned} \quad \dots \textcircled{1}$$

である。また、

$$\begin{aligned} \int_0^1 \log(x^2+1) dx &= [x \log(x^2+1)]_0^1 - 2 \int_0^1 \frac{x^2}{x^2+1} dx \\ &= \log 2 - 2 \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{x^2+1} \right) dx \\ &= \log 2 - 2 + 2 \int_0^1 \frac{1}{x^2+1} dx \end{aligned}$$

であり、ここで、置換積分を用いて $x = \tan \theta$ とすると、 $dx = \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta$ であり、

x	0	$\rightarrow$	1
θ	0	$\rightarrow$	$\frac{\pi}{4}$

となるので、

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2+1} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\tan^2 \theta + 1} \cdot \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta = [\theta]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4}$$

となる。よって、

$$\int_0^1 \log(x^2+1) dx = \log 2 - 2 + \frac{\pi}{2} \quad \dots \textcircled{2}$$

である。以上①、②より、

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 \log(x+1) dx - \frac{1}{2} \int_0^1 \log(x^2+1) dx \\ &= (2 \log 2 - 1) - \frac{1}{2} \left(\log 2 - 2 + \frac{\pi}{2} \right) \\ &= \frac{3}{2} \log 2 - \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{3}{2} \log 2 - \frac{\pi}{4}$

2

(1)

題意で与えられた曲線の方程式 $C_1: y = \cos x$, $C_2: y = k \tan x$ をそれぞれ x で微分すると,

$$y' = -\sin x$$

$$y' = \frac{k}{\cos^2 x}$$

となる。ここで、直線 ℓ_1, ℓ_2 の傾きをそれぞれ m_1, m_2 とし、交点の x 座標を t とすると、 $0 \leq$

$t < \frac{\pi}{2}$ であり,

$$m_1 = -\sin t, m_2 = \frac{k}{\cos^2 t}$$

となる。また,

$$\cos t = k \tan t$$

$$\Leftrightarrow \cos t = k \frac{\sin t}{\cos t}$$

$$\therefore \cos^2 t = k \sin t$$

なので,

$$m_1 \cdot m_2 = -\sin t \cdot \frac{k}{\cos^2 t} = -\sin t \cdot \frac{k}{k \sin t} = -1$$

となり、直線 ℓ_1, ℓ_2 は直交するので、 $\theta = \frac{\pi}{2}$ である。

(答) $\theta = \frac{\pi}{2}$

(2)

C_1, C_2 の交点を求める。

$$\cos x = \frac{3}{2} \tan x$$

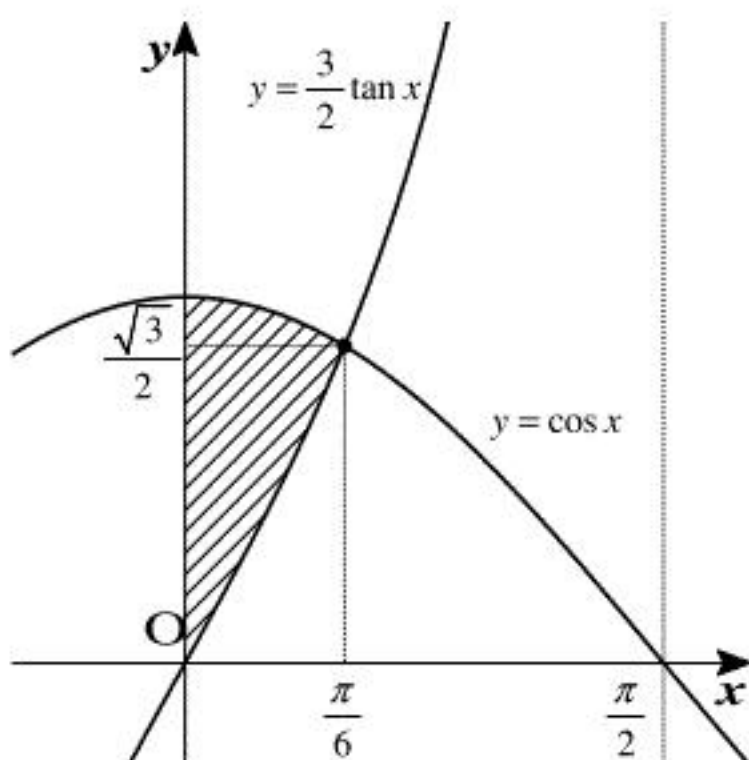
$$\Leftrightarrow 2 \cos^2 x = 3 \sin x$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin^2 x + 3 \sin x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2 \sin x - 1)(\sin x + 2) = 0$$

$$\therefore \sin x = \frac{1}{2}, x = \frac{\pi}{6}$$

となるので、曲線 C_1, C_2 と y 軸で囲まれる図形は下図の斜線部となる。



よって,

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^{\pi/6} \left\{ (\cos x)^2 - \left(\frac{3}{2} \tan x \right)^2 \right\} dx \\ &= \pi \int_0^{\pi/6} \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} - \frac{9}{4} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{9}{4} \right) dx \\ &= \pi \left[\frac{1}{4} \sin 2x - \frac{9}{4} \tan x + \frac{11}{4} x \right]_0^{\pi/6} \\ &= \pi \left(\frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{3\sqrt{3}}{4} + \frac{11}{24} \pi \right) \\ &= \frac{11}{24} \pi^2 - \frac{5\sqrt{3}}{8} \pi \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{11}{24} \pi^2 - \frac{5\sqrt{3}}{8} \pi$

3

(1)

$$AB = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4a-6c & 4b-6d \\ a-c & b-d \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4a+b & -6a-b \\ 4c+d & -6c-d \end{pmatrix}$$

であり、 $AB=BA$ より、 $(1, 1)$ 成分と $(2, 1)$ 成分を比較して、

$$\begin{cases} 4a-6c=4a+b \\ a-c=4c+d \end{cases}$$

$$\therefore b=-6c, d=a-5c$$

となる。このとき、 $(1, 2)$ 成分と、 $(2, 2)$ 成分の等号も成り立つので、これが求める答である。

(答) $b=-6c, d=a-5c$

(2)

$$B^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix}$$

であるから、 $B^2=B$ を満たすための必要十分条件は

$$\begin{cases} a^2+bc=a \\ ab+bd=b \\ ac+cd=c \\ bc+d^2=d \end{cases}$$

である。ここで、(1)の結果を代入して整理すると、

$$\begin{cases} a^2-6c^2=a & \cdots \textcircled{1} \\ 2ac-5c^2=c & \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

となる。 $c \neq 0$ と②より、

$$2a-5c=1 \quad \therefore c=\frac{2a-1}{5}$$

であるから、これを①に代入して、

$$a^2-6\left(\frac{2a-1}{5}\right)^2=a$$

$$\Leftrightarrow a^2-a-6=0$$

$$\Leftrightarrow (a+2)(a-3)=0$$

$$\therefore a=-2, 3$$

となる。よって、これを②に代入し、 $c=1, -1$ となり、さらに、(1)を用いると、

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

と求まる。

(答) $B = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

(3)

[1] $B = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ のとき

$$C = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -12 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

となる。ここで、 $D = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ とすると、(2)より $D^2=D$ となるから、 $D^n=D$ となること

により、

$$C^n = 2^n D^n = 2^n D = \begin{pmatrix} 3 \cdot 2^n & -6 \cdot 2^n \\ 2^n & -2 \cdot 2^n \end{pmatrix}$$

となる。

[2] $B = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ のとき

$$C = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となるから、このとき

$$C^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となる。

以上、[1], [2]より、

$$\begin{cases} B = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \text{ のとき, } C^n = \begin{pmatrix} 3 \cdot 2^n & -6 \cdot 2^n \\ 2^n & -2 \cdot 2^n \end{pmatrix} \\ B = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \text{ のとき, } C^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

となる。

(答) $\begin{cases} B = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \text{ のとき, } C^n = \begin{pmatrix} 3 \cdot 2^n & -6 \cdot 2^n \\ 2^n & -2 \cdot 2^n \end{pmatrix} \\ B = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \text{ のとき, } C^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{cases}$

(4)

(3)の[2]より、 $B = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ のとき、

$$A = B + E$$

となるので、

$$\begin{aligned} A^n &= (B+E)^n \\ &= {}_n C_0 B^n + {}_n C_1 B^{n-1} + \cdots + {}_n C_{n-1} B + E^n \\ &= B \cdot ({}_n C_0 + {}_n C_1 + \cdots + {}_n C_{n-1}) + E \\ &= (2^n - 1) \cdot B + E \\ &= (2^n - 1) \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 \cdot 2^n - 2 & -6 \cdot 2^n + 6 \\ 2^n - 1 & -2 \cdot 2^n + 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。

(答) $A^n = \begin{pmatrix} 3 \cdot 2^n - 2 & -6 \cdot 2^n + 6 \\ 2^n - 1 & -2 \cdot 2^n + 3 \end{pmatrix}$

4

(1)

点 H を線分 AB を $t:1-t$ に内分する点とする。

$$\overrightarrow{OH} = (1-t)\vec{a} + t\vec{b}$$

$$\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$$

と表され、また、OH と AB は直交するので、

$$\overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$$

$$\Leftrightarrow \{(1-t)\vec{a} + t\vec{b}\} \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = 0$$

$$\Leftrightarrow (1-t)\vec{a} \cdot \vec{b} - (1-t)|\vec{a}|^2 + t|\vec{b}|^2 - t\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

$$\Leftrightarrow (p-9) + (13-2p)t = 0$$

$$\therefore t = \frac{9-p}{13-2p}$$

となる。よって、

$$\overrightarrow{OH} = \frac{4-p}{13-2p}\vec{a} + \frac{9-p}{13-2p}\vec{b}$$

である。

$$(答) \overrightarrow{OH} = \frac{4-p}{13-2p}\vec{a} + \frac{9-p}{13-2p}\vec{b}$$

(2)

$$\overrightarrow{ON} = s\vec{a}$$

とする。

$$\overrightarrow{NM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{ON} = \left(\frac{1}{2} - s\right)\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$$

であり、また、NM と OH は平行なので、

$$k \cdot \overrightarrow{NM} = \overrightarrow{OH}$$

と表せる。よって、係数を比較して、

$$\left(\frac{1}{2} - s\right)k\vec{a} + \frac{1}{2}k\vec{b} = \frac{4-p}{13-2p}\vec{a} + \frac{9-p}{13-2p}\vec{b}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{1}{2} - s\right)k = \frac{4-p}{13-2p} \\ \frac{1}{2}k = \frac{9-p}{13-2p} \end{cases}$$

$$\therefore k = \frac{18-2p}{13-2p}, s = \frac{5}{18-2p}$$

となる。以上より、

$$\overrightarrow{ON} = \frac{5}{18-2p}\vec{a}$$

である。

$$(答) \overrightarrow{ON} = \frac{5}{18-2p}\vec{a}$$

(3)

$p \geq 0$ より、 $\angle AOB = \theta$ とすると、 $0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}$ となる。よって、

$$0 \leq p = 6 \cos \theta < 6$$

となる。

$$\frac{ON}{OA} = \frac{5}{18-2p}$$

より、

$$0 \leq p < 6$$

$$\Leftrightarrow 6 < 18-2p \leq 18$$

$$\therefore \frac{5}{18} \leq \frac{ON}{OA} < \frac{5}{6}$$

となる。

$$(答) \frac{5}{18} \leq \frac{ON}{OA} < \frac{5}{6}$$

(4)

このとき、

$$\overrightarrow{ON} = \frac{1}{4}\vec{a}$$

であるから、

$$\frac{5}{18-2p} = \frac{1}{4}$$

$$\therefore p = -1$$

となる。よって、三角形 OAB の面積 S は、

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2} = \frac{1}{2} \sqrt{3^2 \cdot 2^2 - (-1)^2} = \frac{\sqrt{35}}{2}$$

となる。

$$(答) \frac{\sqrt{35}}{2}$$