

平成 25 年度

前 期 日 程

数 学 (120 分)

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
また、別冊の解答用紙についても同じです。
2. 問題は、1 ページから 4 ページまであります。解答用紙は、前 1，
前 2，前 3，前 4 の 4 枚からなっています。ページの脱落等に気付いたときは、手をあげて監督者に知らせなさい。
3. 解答はすべて、各問題の解答用紙の解答欄に記入しなさい。
なお、解答用紙の裏にも解答を記入する場合には、表と上下を逆にして記入しなさい。
4. 監督者の指示に従って、すべての解答用紙の該当欄に志望学科名及び受験番号（2 か所）を記入しなさい。
5. 解答用紙の※を付した欄には、何も記入してはいけません。
6. 試験終了後、この問題冊子は持ち帰りなさい。

1 関数

$$f(x) = \log(x+1) - \frac{1}{2}\log(x^2+1) \quad (x > -1)$$

について、次の問いに答えよ。

- (1) $f(x)$ の増減を調べて極値を求めよ。
- (2) k を実数とする。 x についての方程式 $f(x) = k$ の相異なる実数解の個数を調べよ。
- (3) 曲線 $y = f(x)$ ， x 軸および直線 $x = 1$ で囲まれる図形の面積 S を求めよ。

2 k を正の定数とする。2つの曲線

$$C_1: y = \cos x \quad \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

$$C_2: y = k \tan x \quad \left(0 \leq x < \frac{\pi}{2}\right)$$

について、次の問いに答えよ。

(1) C_1 と C_2 の交点におけるそれぞれの曲線の接線を ℓ_1 , ℓ_2 とする。直線 ℓ_1 , ℓ_2 がなす角を θ $\left(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right)$ とするとき、 θ の値を求めよ。

(2) $k = \frac{3}{2}$ のとき、曲線 C_1 , C_2 と y 軸で囲まれる図形を x 軸のまわりに回転させてできる立体の体積 V を求めよ。

3 行列

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

が条件 $AB = BA$, $c \neq 0$ を満たしている。 $C = A - B$ とするとき、次の問いに答えよ。

- (1) b, d を a, c で表せ。
- (2) $B^2 = B$ を満たす B をすべて求めよ。
- (3) (2)で求めた B のそれぞれについて、 C^n を求めよ。ただし n は自然数である。
- (4) A^n を求めよ。ただし n は自然数である。

4 三角形 OAB がある。点 O から直線 AB に下ろした垂線の足を H とする。辺 AB の中点を M とし、M を通り辺 AB に垂直な直線と直線 OA との交点を N とする。 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ とし、 $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = p$ とするとき、次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{OH}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$ および p を用いて表せ。

(2) $\overrightarrow{ON}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$ および p を用いて表せ。

(3) $p \geq 0$ であるとき $\frac{ON}{OA}$ の値の範囲を求めよ。

(4) 点 N が線分 OA を 1 : 3 に内分するとき、三角形 OAB の面積 S を求めよ。