

1

(1)

$$S_n = r + 2r^2 + \cdots + nr^n \quad \cdot \cdot \cdot \textcircled{1}$$

$$rS_n = r^2 + 2r^3 + \cdots + (n-1)r^n + nr^{n+1} \quad \cdot \cdot \cdot \textcircled{2}$$

であるから、①、②の辺々差をとって

$$(1-r)S_n = r + r^2 + \cdots + r^n - nr^{n+1}$$

$$\Leftrightarrow (1-r)S_n = \frac{r(1-r^n)}{1-r} - nr^{n+1} \quad (\because r \neq 1)$$

$$\Leftrightarrow S_n = \frac{r - r^{n+1} - n(1-r)r^{n+1}}{(1-r)^2} \quad (\because r \neq 1)$$

$$\therefore S_n = \frac{nr^{n+2} - (n+1)r^{n+1} + r}{(1-r)^2}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad S_n = \frac{nr^{n+2} - (n+1)r^{n+1} + r}{(1-r)^2}$$

(2)

$x > 0$ のとき、

$$0 < e^{-x} < 1$$

であるから、(1)の結果を用いて、

$$\begin{aligned} f_n(x) &= e^{-x} + 2e^{-2x} + \cdots + ne^{-nx} \\ &= \frac{ne^{-(n+2)x} - (n+1)e^{-(n+1)x} + e^{-x}}{(1-e^{-x})^2} \\ &= \frac{1}{(1-e^{-x})^2} \left\{ \frac{1}{x}(n+2)xe^{-(n+2)x} - 2e^{-(n+2)x} - \frac{1}{x}(n+1)xe^{-(n+1)x} + e^{-x} \right\} \end{aligned}$$

となる。ここで、

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-t} = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} te^{-t} = 0$$

であるから、

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \\ &= \frac{1}{(1-e^{-x})^2} \cdot e^{-x} \\ &= \frac{e^x}{(e^x - 1)^2} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad f(x) = \frac{e^x}{(e^x - 1)^2}$$

(3)

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \int \frac{e^x}{(e^x - 1)^2} dx \\ &= \int \frac{(e^x - 1)'}{(e^x - 1)^2} dx \\ &= -\frac{1}{e^x - 1} + C \end{aligned}$$

である。ただし、 C は積分定数とする。

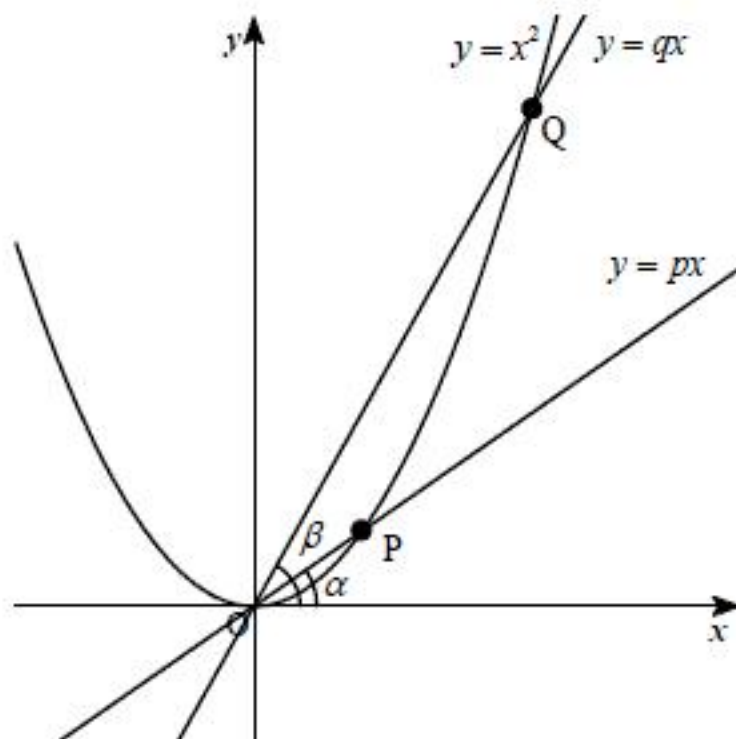
$$(\text{答}) \quad \int f(x) dx = -\frac{1}{e^x - 1} + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

(4)

$$\begin{aligned} \int_{\log 2}^{\log 3} x f(x) dx &= \int_{\log 2}^{\log 3} x \left(-\frac{1}{e^x - 1} \right)' dx \\ &= \left[x \left(-\frac{1}{e^x - 1} \right) \right]_{\log 2}^{\log 3} - \int_{\log 2}^{\log 3} \left(-\frac{1}{e^x - 1} \right) dx \\ &= -\frac{\log 3}{3-1} + \frac{\log 2}{2-1} + \int_{\log 2}^{\log 3} \left(\frac{e^x}{e^x - 1} - 1 \right) dx \\ &= -\frac{1}{2} \log 3 + \log 2 + \left[\log |e^x - 1| - x \right]_{\log 2}^{\log 3} \\ &= -\frac{1}{2} \log 3 + \log 2 + (\log 2 - \log 3) - (\log 1 - \log 2) \\ &= 3 \log 2 - \frac{3}{2} \log 3 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \int_{\log 2}^{\log 3} x f(x) dx = 3 \log 2 - \frac{3}{2} \log 3$$



(1)

$P(p, p^2)$, $Q(q, q^2)$ はそれぞれ直線 $y = px$, $y = qx$ 上に存在する。直線 OP と x 軸のなす角を α , 直線 OQ と x 軸のなす角を β とすると, $p = \tan \alpha$, $q = \tan \beta$ である。 $0 < p < q$ であることより

$$0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$$

が成り立つ。したがって,

$$\angle POQ = \frac{\pi}{4}$$

であるとき,

$$\beta - \alpha = \frac{\pi}{4} \quad \dots \textcircled{1}$$

であり,

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$$

となる。よって, p のとり得る値の範囲は, 正接関数は鋭角の範囲で単調増加関数であるから

$$\begin{aligned} \tan 0 < p < \tan \frac{\pi}{4} \\ \Leftrightarrow 0 < p < 1 \end{aligned} \quad \dots \textcircled{2}$$

となる。

(答) $0 < p < 1$

(2)

$p = \tan \alpha$, $q = \tan \beta$ より

$$\begin{aligned} \tan(\beta - \alpha) &= \frac{\tan \beta - \tan \alpha}{1 + \tan \beta \tan \alpha} \\ &= \frac{q - p}{1 + pq} \end{aligned}$$

と表すことができるから, ①より

$$\begin{aligned} \tan \frac{\pi}{4} &= \frac{q - p}{1 + pq} \\ \Leftrightarrow q - p &= 1 + pq \left(\because \tan \frac{\pi}{4} = 1 \right) \quad \dots \textcircled{3} \\ \Leftrightarrow (p - 1)q &= -(p + 1) \\ \Leftrightarrow q &= \frac{p + 1}{1 - p} \left(\because \textcircled{2} \right) \end{aligned}$$

となる。

(答) $q = \frac{p + 1}{1 - p}$

(3)

点 P における $y = x^2$ の接線の方程式は

$$y = 2px - p^2 \quad \dots \textcircled{4}$$

であり, 点 Q における $y = x^2$ の接線の方程式は

$$y = 2qx - q^2 \quad \dots \textcircled{5}$$

である。この2直線の交点 R の座標は x, y の連立方程式③, ④を解いて

$$R\left(\frac{p+q}{2}, pq\right)$$

となる。ここで, $X = \frac{p+q}{2}$, $Y = pq$ とおく。 q について,

$$\begin{aligned} q &= \frac{1+p}{1-p} \\ &= \frac{2}{1-p} - 1 \end{aligned}$$

は $0 < p < 1$ において単調増加し, 常に正の値をとる。したがって, X, Y も $0 < p < 1$ において単調増加し,

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow 0+0} q &= 1 \\ \lim_{p \rightarrow 1-0} q &= \infty \end{aligned}$$

であるから, 点 R の x 座標 X , y 座標 Y のとり得る値の範囲は

$$X > \frac{1}{2}, Y > 0 \quad \dots \textcircled{6}$$

となる。

(答) $R\left(\frac{p+q}{2}, pq\right), \frac{p+q}{2} > \frac{1}{2}, pq > 0$

(4)

$0 < p < q$ より③の両辺の値はともに常に正の値であるから,

$$\begin{aligned} q - p &= 1 + pq \\ \Leftrightarrow (q - p)^2 &= (1 + pq)^2 \\ \Leftrightarrow (p + q)^2 - 4pq &= (1 + pq)^2 \end{aligned}$$

と変形することができる。 $R(x, y)$ とおくと $(x, y) = \left(\frac{p+q}{2}, pq\right)$ であるから,

$$\begin{aligned} (2x)^2 - 4y &= (1+y)^2 \\ \Leftrightarrow 4x^2 - 4y &= 1 + 2y + y^2 \\ \Leftrightarrow 4x^2 - y^2 - 6y &= 1 \\ \Leftrightarrow 4x^2 - (y+3)^2 &= -8 \\ \Leftrightarrow \frac{x^2}{2} - \frac{(y+3)^2}{8} &= -1 \end{aligned}$$

となる。また, ⑥より,

$$x > \frac{1}{2}, y > 0$$

であるから, 点 R が描く曲線の方程式は,

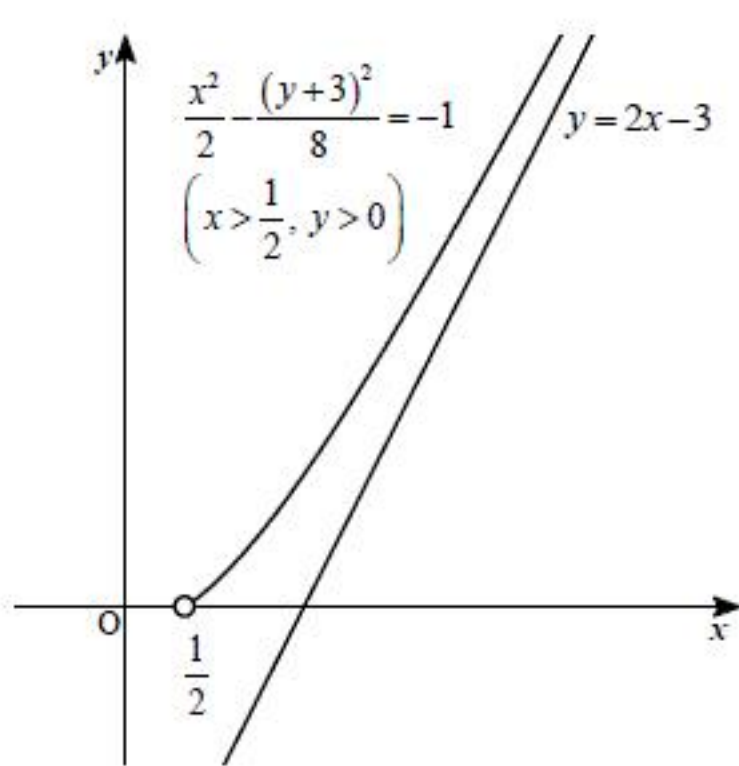
$$\frac{x^2}{2} - \frac{(y+3)^2}{8} = -1 \left(x > \frac{1}{2}, y > 0 \right)$$

である。

(答) $\frac{x^2}{2} - \frac{(y+3)^2}{8} = -1 \left(x > \frac{1}{2}, y > 0 \right)$

(5)

点 R が描く曲線の概形は下図のようになる。



曲線 $\frac{x^2}{2} - \frac{(y+3)^2}{8} = -1$ の漸近線の方程式は

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{2} - \frac{(y+3)^2}{8} &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y+3}{2\sqrt{2}} \right) \left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{y+3}{2\sqrt{2}} \right) &= 0 \\ \Leftrightarrow y &= 2x - 3, y = -2x - 3 \end{aligned}$$

が考えられるが, いま点 R の描く曲線は $\frac{x^2}{2} - \frac{(y+3)^2}{8} = -1$ のうち $x > \frac{1}{2}, y > 0$ の部分であるから,

求める漸近線の方程式は,

$$y = 2x - 3$$

となる。

(答) $y = 2x - 3$

3

(1)

$$B = A - \frac{a+d}{2}E \text{ より}$$

$$B^2 = \left(A - \frac{a+d}{2}E \right)^2$$

$$= A^2 - (a+d)A + \frac{(a+d)^2}{4}E \quad \dots \textcircled{1}$$

となる。 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ について、ケーリー・ハミルトンの定理より

$$A^2 - (a+d)A + (ad-bc)E = O$$

$$\Leftrightarrow A^2 - (a+d)A = -(ad-bc)E$$

が成り立つから、これを①に代入して、

$$B^2 = -(ad-bc)E + \frac{(a+d)^2}{4}E$$

$$= \left(-ad + bc + \frac{(a+d)^2}{4} \right) E \quad \dots \textcircled{2}$$

となる。また、 $(a-d)^2 + 4bc = 0$ が成り立つことより

$$bc = -\frac{(a-d)^2}{4}$$

となるから、これを②に代入して

$$B^2 = \left(-ad - \frac{(a-d)^2}{4} + \frac{(a+d)^2}{4} \right) E$$

$$= O$$

となる。

(答) $B^2 = O$

(2)

(1)の結果より、

$$B^k = O \quad (k = 2, 3, 4, \dots)$$

が成り立つ。したがって、自然数 n に対して、

$$A^n = \left(B + \frac{a+d}{2}E \right)^n$$

$$= \sum_{k=0}^n {}_nC_k \left(\frac{a+d}{2} \right)^k B^{n-k} E^k$$

$$= {}_nC_{n-1} \left(\frac{a+d}{2} \right)^{n-1} B^1 E^{n-1} + \left(\frac{a+d}{2} \right)^n B^0 E^n$$

$$= n \left(\frac{a+d}{2} \right)^{n-1} B + \left(\frac{a+d}{2} \right)^n E$$

$$= n \left(\frac{a+d}{2} \right)^{n-1} \left(A - \frac{a+d}{2}E \right) + \left(\frac{a+d}{2} \right)^n E$$

$$= n \left(\frac{a+d}{2} \right)^{n-1} A + \left\{ -n \left(\frac{a+d}{2} \right)^n + \left(\frac{a+d}{2} \right)^n \right\} E$$

$$= n \left(\frac{a+d}{2} \right)^{n-1} A - (n-1) \left(\frac{a+d}{2} \right)^n E$$

と表すことができる。以上より、自然数 n に対して

$$(p, q) = \left(n \left(\frac{a+d}{2} \right)^{n-1}, -(n-1) \left(\frac{a+d}{2} \right)^n \right)$$

とおくと、

$$A^n = pA + qE$$

と表すことができる。

$$(答) \quad (p, q) = \left(n \left(\frac{a+d}{2} \right)^{n-1}, -(n-1) \left(\frac{a+d}{2} \right)^n \right)$$

(3)

(2)の結果より $x = \frac{a+d}{2}$ とおくと

$$A^5 = 5x^4 A - 4x^5 E$$

$$= \begin{pmatrix} 5ax^4 - 4x^5 & 5bx^4 \\ 5cx^4 & 5dx^4 - 4x^5 \end{pmatrix}$$

となるから、行列 A が $A^5 = \begin{pmatrix} 11 & -20 \\ 5 & -9 \end{pmatrix}$ をみたすとき

$$\begin{cases} 5ax^4 - 4x^5 = 11 \\ 5bx^4 = -20 \\ 5cx^4 = 5 \\ 5dx^4 - 4x^5 = -9 \end{cases} \quad \dots \textcircled{3}$$

が成り立つ。ここで

$$\begin{cases} 5ax^4 - 4x^5 = 11 \\ 5dx^4 - 4x^5 = -9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5ax^4 - 4x^5 = 11 \\ 5(a+d)x^4 - 8x^5 = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5ax^4 - 4x^5 = 11 \\ 10x^5 - 8x^5 = 2 \quad (\because a+d = 2x) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5ax^4 - 4x^5 = 11 \\ x^5 = 1 \end{cases}$$

となる。 a, d が実数であることより $x = \frac{a+d}{2}$ は実数となるから

$$x^5 = 1$$

$$\Leftrightarrow x = 1$$

である。これを③に代入すると

$$\begin{cases} 5a - 4 = 11 \\ 5b = -20 \\ 5c = 5 \\ 5d - 4 = -9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (a, b, c, d) = (3, -4, 1, -1)$$

となるから

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

である。

$$(答) \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

4

(1)

条件(i), (ii)より線分OCは立方体Kの対角線であるから

$$\begin{aligned} \text{OC} &= \sqrt{\ell^2 + \ell^2 + \ell^2} \\ &= \sqrt{3}\ell \end{aligned}$$

となる。一方、C(3, 0, 0)よりOC=3であるから

$$\begin{aligned} \sqrt{3}\ell &= 3 \\ \Leftrightarrow \ell &= \sqrt{3} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\ell = \sqrt{3}$

(2)

線分OAは立方体Kの辺であるから、

$$\text{OA} = \ell = \sqrt{3}$$

であり、線分ACは立方体Kの1つの面の対角線であるから、

$$\begin{aligned} \text{AC} &= \sqrt{2}\ell \\ &= \sqrt{6} \end{aligned}$$

である。A(a, b, 0), C(3, 0, 0)から、

$$\begin{aligned} \text{OA}^2 &= 3 \\ \Leftrightarrow a^2 + b^2 &= 3 & \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{AC}^2 &= 6 \\ \Leftrightarrow (a-3)^2 + b^2 &= 6 & \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

が成り立つ。①, ②を連立して解くと、

$$\begin{aligned} &\begin{cases} a^2 + b^2 = 3 \\ (a-3)^2 + b^2 = 6 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} a^2 + b^2 = 3 \\ (a-3)^2 - a^2 = 3 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} a^2 + b^2 = 3 \\ a = 1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &(a, b) = (1, \sqrt{2}) \quad (\because b > 0) \end{aligned}$$

となる。

(答) A(1, $\sqrt{2}$, 0)

(3)

線分OBは立方体Kの1つの面の対角線であるから、

$$\text{OB} = \sqrt{6}$$

であり、線分AB, BCは立方体Kの辺であるから、

$$\begin{aligned} \text{AB} &= \sqrt{3} \\ \text{BC} &= \sqrt{3} \end{aligned}$$

である。A(1, $\sqrt{2}$, 0), B(r, s, t), C(3, 0, 0)より

$$\begin{cases} r^2 + s^2 + t^2 = 6 \\ (r-1)^2 + (s-\sqrt{2})^2 + t^2 = 3 \\ (r-3)^2 + s^2 + t^2 = 3 \end{cases}$$

が成り立つ。これを解くと、

$$(r, s, t) = \left(2, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2} \right) \quad (\because t > 0)$$

となる。

(答) B(2, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\sqrt{6}}{2}$)

(4)

点Pは線分AB上の点であるから、 $0 \leq p \leq 1$ を満たす実数pを用いて

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{OP}} &= (1-p)\overrightarrow{\text{OA}} + p\overrightarrow{\text{OB}} \\ &= \left(p+1, \sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}p, \frac{\sqrt{6}}{2}p \right) \end{aligned}$$

と表すことができる。したがって、H(x, 0, 0)である点Hに対して

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{PH}} &= \overrightarrow{\text{OH}} - \overrightarrow{\text{OP}} \\ &= \left(x-p-1, \frac{\sqrt{2}}{2}p - \sqrt{2}, -\frac{\sqrt{6}}{2}p \right) \end{aligned}$$

となる。x軸と平行な単位ベクトルを

$$\vec{e} = (1, 0, 0)$$

とすると、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{PH}} &\perp \vec{e} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{\text{PH}} \cdot \vec{e} &= 0 \\ \Leftrightarrow x-p-1 &= 0 \\ \Leftrightarrow p &= x-1 \end{aligned}$$

となる。 $0 \leq p \leq 1$ であるから

$$1 \leq x \leq 2 \quad \dots \textcircled{3}$$

が成り立つもとので、

$$\overrightarrow{\text{PH}} = \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{3\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{6}}{2}x + \frac{\sqrt{6}}{2} \right)$$

より

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{\text{PH}}|^2 &= 0^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{3\sqrt{2}}{2} \right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{6}}{2}x + \frac{\sqrt{6}}{2} \right)^2 \\ &= 2x^2 - 6x + 6 \end{aligned}$$

$$\therefore |\overrightarrow{\text{PH}}| = \sqrt{2x^2 - 6x + 6} \quad (1 \leq x \leq 2)$$

となる。

(答) $|\overrightarrow{\text{PH}}| = \sqrt{2x^2 - 6x + 6} \quad (1 \leq x \leq 2)$

(5)

線分OCはx軸上に存在し、立方体Kの対角線であるから、立方体Kをx軸を回転軸として1回転させて得られる回転体は、直線OCを軸に1回転させて得られる回転体と一致する。点A, Bからx軸に下ろした垂線の足をそれぞれH₁, H₂とすると、H₁, H₂のx座標はそれぞれ1, 2である。△OAH₁をx軸まわりに1回転してできる立体の体積をV₁、線分ABをx軸まわりに1回転させて得られる曲面と平面x=1, x=2とで囲まれた立体の体積をV₂、△CBH₂をx軸まわりに1回転してできる立体の体積をV₃とすると、求める体積Vは

$$V = V_1 + V_2 + V_3$$

である。(4)の結果より、x=1のとき点Pと点Aが一致するから

$$\text{AH}_1 = \sqrt{2 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 + 6} = \sqrt{2}$$

となる。したがって、

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \text{AH}_1^2 \cdot \text{OH}_1 \\ &= \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (\sqrt{2})^2 \cdot 1 \\ &= \frac{2}{3} \pi \end{aligned}$$

となる。また、図形の対称性より

$$V_3 = V_1 = \frac{2}{3} \pi$$

である。さらに、(4)の結果より、

$$\begin{aligned} V_2 &= \pi \int_1^2 (2x^2 - 6x + 6) dx \\ &= \pi \left[\frac{2}{3} x^3 - 3x^2 + 6x \right]_1^2 \\ &= \frac{5}{3} \pi \end{aligned}$$

となる。以上より、

$$\begin{aligned} V &= \frac{2}{3} \pi + \frac{5}{3} \pi + \frac{2}{3} \pi \\ &= 3\pi \end{aligned}$$

である。

(答) $V = 3\pi$