

平成 26 年度

前 期 日 程

数 学 (120 分)

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
また、別冊の解答用紙についても同じです。
2. 問題は、1 ページから 4 ページまであります。解答用紙は、

，

，

，

 の 4 枚からなっています。ページの脱落等に気付いたときは、手をあげて監督者に知らせなさい。
3. 解答はすべて、各問題の解答用紙の解答欄に記入しなさい。
なお、解答用紙の裏にも解答を記入する場合には、表と上下を逆にして記入しなさい。
4. 監督者の指示に従って、すべての解答用紙の該当欄に志望学科名及び受験番号（2 か所）を左詰めで記入しなさい。
5. 解答用紙の※を付した欄には、何も記入してはいけません。
6. 試験終了後、この問題冊子は持ち帰りなさい。

1 以下の問いに答えよ。

(1) $r \neq 1$ のとき $S_n = r + 2r^2 + 3r^3 + \cdots + nr^n$ を求めよ。

(2) $x > 0$ に対して

$$f_n(x) = e^{-x} + 2e^{-2x} + 3e^{-3x} + \cdots + ne^{-nx}$$

とおく。極限 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ を求めよ。ただし $\lim_{t \rightarrow \infty} te^{-t} = 0$ であることを用いてもよい。

(3) (2)で得られた関数 $f(x)$ について、不定積分 $\int f(x) dx$ を求めよ。

(4) (2)で得られた関数 $f(x)$ について、定積分 $\int_{\log 2}^{\log 3} xf(x) dx$ を求めよ。

2 放物線 $y = x^2$ 上の動点 $P(p, p^2)$, $Q(q, q^2)$ が次の条件をみたしている。

$$0 < p < q, \quad \angle POQ = \frac{\pi}{4}$$

ただし O は原点である。点 P と点 Q における接線の交点を R とする。

- (1) p のとり得る値の範囲を求めよ。
- (2) q を p の式で表せ。
- (3) 点 R の x 座標, y 座標それぞれのとり得る値の範囲を求めよ。
- (4) 点 R が描く曲線の方程式を求めよ。
- (5) 点 R が描く曲線の漸近線を求めよ。

3 実数 a, b, c, d について

$$(a-d)^2 + 4bc = 0$$

が成立している。このとき行列

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad B = A - \frac{a+d}{2}E$$

について、以下の問いに答えよ。ただし $A \neq \frac{a+d}{2}E$ とする。

(1) 行列 B^2 を求めよ。

(2) 自然数 n に対して

$$A^n = pA + qE$$

となる実数 p, q を n と a, b, c, d で表せ。

(3) 行列 A が次をみたすとき、 A を求めよ。

$$A^5 = \begin{pmatrix} 11 & -20 \\ 5 & -9 \end{pmatrix}$$

4 座標空間に立方体 K があり、原点 O と 3 点 $A(a, b, 0)$, $B(r, s, t)$, $C(3, 0, 0)$ が次の条件をみたしている。

(i) OA , AB , BC は立方体 K の辺である。

(ii) OC は立方体 K の辺ではない。

(iii) $b > 0$, $t > 0$

このとき、以下の問いに答えよ。

(1) 立方体 K の一辺の長さ l を求めよ。

(2) 点 A の座標を求めよ。

(3) 点 B の座標を求めよ。

(4) 辺 AB 上の点 P から x 軸に下ろした垂線の足を $H(x, 0, 0)$ とする。 PH の長さを x を用いて表せ。

(5) 立方体 K を x 軸を回転軸として 1 回転させて得られる回転体の体積 V を求めよ。