

1

(1)

$x \geq 1$ において、 $f(x) = 2\sqrt{x} - (1 + \log x)$ とおく。 $f(x)$ を x について微分すると、

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x} \\ &= \frac{\sqrt{x} - 1}{x} \end{aligned}$$

となり、 $x \geq 1$ において $\sqrt{x} \geq 1$ であるから、 $f'(x) \geq 0$ となる。したがって、 $x \geq 1$ において $f(x)$ は単調増加であるから、

$$f(x) \geq f(1) = 1$$

となる。以上より、

$$f(x) > 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x} > 1 + \log x$$

である。

(証明終)

(2)

$g(x) = x \log x$ とおく。 $g(x)$ を x について微分すると、

$$g'(x) = \log x + 1$$

$$g''(x) = \frac{1}{x} > 0 \quad (\because x > 0)$$

を得る。したがって、曲線 C は下に凸であるから、 $y = g(x)$ に2度以上接するような直線は存在しないため、接点と接線が1対1に対応する。ここで、 $t > 0$ である実数 t を用いて、 C 上の点を $(t, t \log t)$ と表すと、この点における接線の方程式は

$$y - t \log t = (\log t + 1)(x - t)$$

$$\Leftrightarrow y = (\log t + 1)x - t$$

である。これが点 $(a, 0)$ を通るから、

$$0 = (\log t + 1)a - t$$

が成り立つ。 $t = e^{-1}$ はこの式を満たさないから、 $t \neq e^{-1}$ としてよい。このとき、 $\log t + 1 \neq 0$ であるから、

$$a = \frac{t}{\log t + 1} \quad \dots \textcircled{1}$$

と変形できる。以上より、点 $(a, 0)$ を通り曲線 C に接する直線の本数は、 t に関する方程式①の解の個数に等しくなることが分かる。

ここで $h(t) = \frac{t}{\log t + 1}$ とおくと、導関数は

$$\begin{aligned} h'(t) &= \frac{\log t + 1 - t \cdot \frac{1}{t}}{(\log t + 1)^2} \\ &= \frac{\log t}{(\log t + 1)^2} \end{aligned}$$

である。また、 $t \rightarrow 0$ 、 $t \rightarrow e^{-1}$ のときの極限值はそれぞれ

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\log t + 1} = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow e^{-1}-0} \frac{t}{\log t + 1} = -\infty, \quad \lim_{t \rightarrow e^{-1}+0} \frac{t}{\log t + 1} = \infty$$

である。一方、 $t \rightarrow \infty$ のときの極限值は、(1)の結果より $t \geq 1$ のときに

$$2\sqrt{t} > 1 + \log t$$

$$\Leftrightarrow \frac{t}{1 + \log t} > \frac{t}{2\sqrt{t}}$$

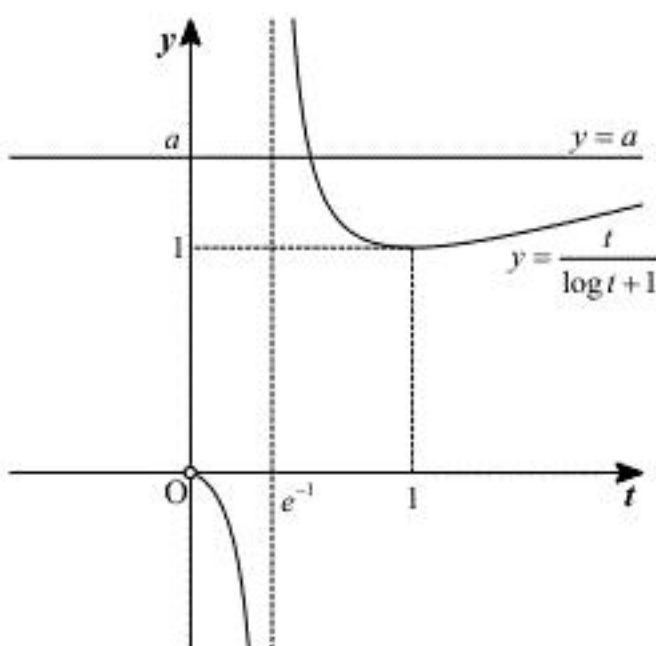
$$\Leftrightarrow \frac{t}{1 + \log t} > \frac{\sqrt{t}}{2}$$

となることを利用すると、 $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{t}}{2} = \infty$ より $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{\log t + 1} = \infty$ となる。

以上より、 $h(t)$ の増減は以下のようになる。

t	(0)	...	e^{-1}	...	1	...
$h'(t)$		-	$\times$	-	0	+
$h(t)$	(0)	$\searrow$	$\times$	$\searrow$	1	$\nearrow$

また、 $y = h(t)$ のグラフは以下のようになる。



上図より、曲線 $y = h(t)$ と直線 $y = a$ の交点の個数を考えると、求める接線の本数は

$$\begin{cases} a > 1 \text{ のとき, 2 本} \\ a < 0, a = 1 \text{ のとき, 1 本} \\ 0 \leq a < 1 \text{ のとき, 0 本} \end{cases}$$

となる。

$$(\text{答}) \begin{cases} a > 1 \text{ のとき, 2 本} \\ a < 0, a = 1 \text{ のとき, 1 本} \\ 0 \leq a < 1 \text{ のとき, 0 本} \end{cases}$$

(3)

接線の傾きが2となるような接点の x 座標を求めると、

$$g'(x) = 2$$

$$\Leftrightarrow \log x + 1 = 2$$

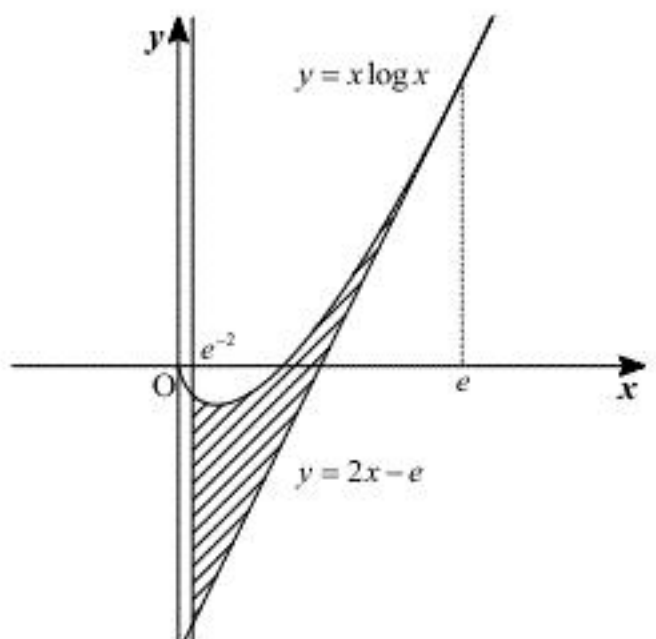
$$\Leftrightarrow \log x = 1$$

$$\therefore x = e$$

となる。したがって、接線の方程式は

$$y = 2x - e$$

となるから、求める面積は以下の斜線部である。



上図より、求める面積は

$$\begin{aligned} \int_{e^{-2}}^e \{x \log x - (2x - e)\} dx &= \left[\frac{1}{2} x^2 \log x \right]_{e^{-2}}^e - \int_{e^{-2}}^e \left(\frac{1}{2} x^2 \cdot \frac{1}{x} \right) dx - \left[x^2 - ex \right]_{e^{-2}}^e \\ &= \frac{e^2}{2} + e^{-4} - \left[\frac{1}{4} x^2 \right]_{e^{-2}}^e + e^{-4} - e^{-1} \\ &= \frac{1}{4} e^2 - e^{-1} + \frac{9}{4} e^{-4} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{4} e^2 - e^{-1} + \frac{9}{4} e^{-4}$$

2

(1)

$g(x)$ を整理すると、

$$g(x) = \frac{2x+1}{-x+2} = \frac{5}{-x+2} - 2$$

となるから、 $y = g(x)$ の値域は $y \neq -2$ である。これをもとに $y = g(x)$ を整理すると、

$$\begin{aligned} y &= g(x) \\ \Leftrightarrow y &= \frac{2x+1}{-x+2} \\ \Leftrightarrow y(-x+2) &= 2x+1 \\ \Leftrightarrow (y+2)x &= 2y-1 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{2y-1}{y+2} \quad (\because y \neq -2) \end{aligned}$$

となる。したがって、逆関数 $g^{-1}(x)$ は

$$g^{-1}(x) = \frac{2x-1}{x+2}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad g^{-1}(x) = \frac{2x-1}{x+2}$$

(2)

合成関数 $f(g(x))$ を計算すると、

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= \frac{2}{2g(x)+3} \\ &= \frac{2}{2 \cdot \frac{2x+1}{-x+2} + 3} \\ &= \frac{-2x+4}{x+8} \end{aligned}$$

となる。さらに、(1)の結果を利用して合成関数 $g^{-1}(f(g(x)))$ を計算すると、

$$\begin{aligned} g^{-1}(f(g(x))) &= \frac{2f(g(x))-1}{f(g(x))+2} \\ &= \frac{2 \cdot \frac{-2x+4}{x+8} - 1}{\frac{-2x+4}{x+8} + 2} \\ &= -\frac{1}{4}x \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad -\frac{1}{4}x \quad (x \neq -8, 2)$$

(3)

背理法を用いて証明する。有理数 q を用いて、 $f(c) = q$ が成立すると仮定する。 $f(c) \neq 0$ であるから、 $q \neq 0$ である。ここで、 $f(c) = q$ を整理すると

$$\begin{aligned} \frac{2}{2c+3} &= q \\ \Leftrightarrow (2c+3)q &= 2 \\ \therefore c &= \frac{2-3q}{2q} \end{aligned}$$

となる。この式について、左辺は無理数であるが、右辺は有理数であるから不合理である。したがって、背理法より $f(c)$ は無理数であることが示された。

(証明終)

(4)

$b_n = g^{-1}(a_n)$ とおくと、数列 $\{b_n\}$ の初項は

$$\begin{aligned} b_1 &= g^{-1}(a_1) \\ &= g^{-1}(g(\sqrt{2})) \\ &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

となる。また、 $a_n = g(b_n)$ が成り立つので、与えられた漸化式より

$$g(b_{n+1}) = f(g(b_n))$$

が成立する。これを逆関数 $g^{-1}(x)$ に入れると、

$$\begin{aligned} g^{-1}(g(b_{n+1})) &= g^{-1}(f(g(b_n))) \\ \therefore b_{n+1} &= -\frac{1}{4}b_n \end{aligned}$$

を得る。したがって、数列 $\{b_n\}$ は初項 $\sqrt{2}$ 、公比 $-\frac{1}{4}$ の等比数列であるから、

$$b_n = \sqrt{2} \left(-\frac{1}{4} \right)^{n-1}$$

となる。以上より、数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$\begin{aligned} a_n &= g(b_n) \\ &= \frac{1+2b_n}{2-b_n} \\ &= \frac{1+2\sqrt{2} \left(-\frac{1}{4} \right)^{n-1}}{2-\sqrt{2} \left(-\frac{1}{4} \right)^{n-1}} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad a_n = \frac{1+2\sqrt{2} \left(-\frac{1}{4} \right)^{n-1}}{2-\sqrt{2} \left(-\frac{1}{4} \right)^{n-1}}$$

(5)

求める極限值は、(4)の結果より

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2\sqrt{2} \left(-\frac{1}{4} \right)^{n-1}}{2-\sqrt{2} \left(-\frac{1}{4} \right)^{n-1}} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{2}$$

定積分をそれぞれ求めると、

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{\pi} x \sin x dx \\ &= \left[-x \cos x \right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos x dx \\ &= \pi + \left[\sin x \right]_0^{\pi} \\ &= \pi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^{\pi} x^2 \cos x dx \\ &= \left[x^2 \sin x \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 2x \sin x dx \\ &= -2I_1 \\ &= -2\pi \end{aligned}$$

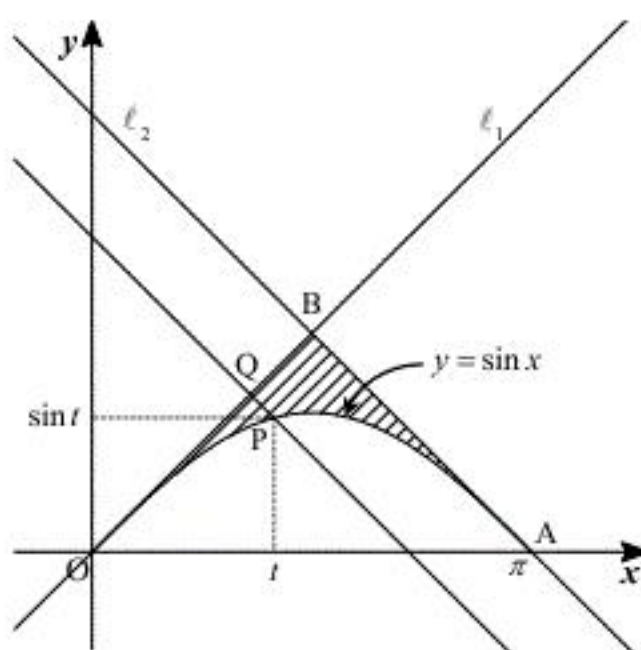
$$\begin{aligned} I_3 &= \int_0^{\pi} \sin^2 x dx \\ &= \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos 2x}{2} dx \\ &= \left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x \right]_0^{\pi} \\ &= \frac{1}{2}\pi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_4 &= \int_0^{\pi} x \cos x \sin x dx \\ &= \int_0^{\pi} \frac{x}{2} \sin 2x dx \\ &= \left[-\frac{x}{4} \cos 2x \right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \frac{1}{4} \cos 2x dx \\ &= -\frac{1}{4}\pi + \left[\frac{1}{8} \sin 2x \right]_0^{\pi} \\ &= -\frac{1}{4}\pi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_5 &= \int_0^{\pi} \sin^2 x \cos x dx \\ &= \int_0^{\pi} \sin^2 x (\sin x)' dx \\ &= \left[\frac{1}{3} \sin^3 x \right]_0^{\pi} \\ &= 0 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad I_1 = \pi, I_2 = -2\pi, I_3 = \frac{1}{2}\pi, I_4 = -\frac{1}{4}\pi, I_5 = 0$$



$y = \sin x$ を x について微分すると、

$$y' = \cos x$$

となる。よって、 ℓ_1 の傾きは 1、 ℓ_2 の傾きは -1 であるから、 ℓ_1 と ℓ_2 は直交する。したがって、

$$\angle OBA = \frac{\pi}{2} \text{ である。}$$

$$(\text{答}) \quad \angle OBA = \frac{\pi}{2}$$

(1) の過程より、直線 ℓ_1, ℓ_2 の方程式をそれぞれ求めると

$$\ell_1: y = x$$

$$\ell_2: y = -(x - \pi)$$

となる。ここで、点 Q は直線 ℓ_1 上の点、つまり直線 $y = x$ 上の点であり、 $OQ = s$ であるから、

点 Q の座標は $\left(\frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{s}{\sqrt{2}} \right)$ となる。一方、直線 PQ は ℓ_1 と垂直であるから、傾きは -1 である。

したがって、直線 PQ の方程式は

$$\begin{aligned} y &= -(x - t) + \sin t \\ &= -x + t + \sin t \end{aligned}$$

となる。この直線は点 Q $\left(\frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{s}{\sqrt{2}} \right)$ を通るので、

$$\begin{aligned} \frac{s}{\sqrt{2}} &= -\frac{s}{\sqrt{2}} + t + \sin t \\ \Leftrightarrow s &= \frac{1}{\sqrt{2}}(t + \sin t) \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad s = \frac{1}{\sqrt{2}}(t + \sin t)$$

線分 PQ の長さは、点 P と直線 $y = x$ の距離であるから、

$$\frac{|1 \cdot t - 1 \cdot \sin t|}{\sqrt{(1)^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}|t - \sin t|$$

と表せる。ここで、 $t \geq 0$ において $t \geq \sin t$ であることを利用すると、

$$\frac{1}{\sqrt{2}}|t - \sin t| = \frac{1}{\sqrt{2}}(t - \sin t)$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(t - \sin t)$$

点 B の座標は $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$ であるから、点 Q が直線 ℓ_1 を点 O から点 B まで動くときの s の範囲は

$$0 \leq s \leq \frac{\sqrt{2}}{2}\pi$$

である。したがって、求める体積 V は

$$V = \pi \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}\pi} PQ^2 ds$$

となる。ここで、(2) の結果より $s = \frac{1}{\sqrt{2}}(t + \sin t)$ であるから、 s と t は以下のように変化する。

s	0	$\rightarrow$	$\frac{\sqrt{2}}{2}\pi$
t	0	$\rightarrow$	π

また、 $s = \frac{1}{\sqrt{2}}(t + \sin t)$ の両辺を t で微分すると、

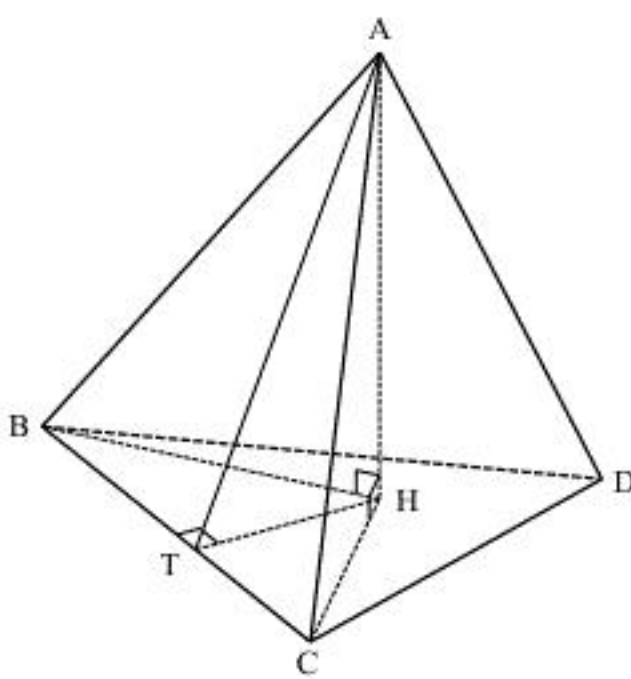
$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + \cos t)$$

となる。以上より、 V を I の結果を用いて計算すると、

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}\pi} PQ^2 ds \\ &= \pi \int_0^{\pi} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(t - \sin t) \right\}^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + \cos t) dt \\ &= \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \int_0^{\pi} (t^2 - 2t \sin t + \sin^2 t)(1 + \cos t) dt \\ &= \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \int_0^{\pi} (t^2 - 2t \sin t + \sin^2 t + t^2 \cos t - 2t \sin t \cos t + \sin^2 t \cos t) dt \\ &= \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \left[\frac{1}{3}t^3 \right]_0^{\pi} + \frac{\pi}{2\sqrt{2}} (-2I_1 + I_3 + I_2 - 2I_4 + I_5) \\ &= \frac{\pi^4}{6\sqrt{2}} + \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \left(-2\pi + \frac{1}{2}\pi - 2\pi + \frac{1}{2}\pi + 0 \right) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{12}\pi^4 - \frac{3\sqrt{2}}{4}\pi^2 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad V = \frac{\sqrt{2}}{12}\pi^4 - \frac{3\sqrt{2}}{4}\pi^2$$



(1)

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}$ であるから、

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{AC}|^2 &= |\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}|^2 \\ &= |\overrightarrow{BC}|^2 - 2\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} + |\overrightarrow{BA}|^2 \\ &= 49 - 2 \cdot 28 + 66 \\ &= 59 \\ \therefore |\overrightarrow{AC}| &= \sqrt{59} \end{aligned}$$

となる。したがって、辺 AC の長さは $\sqrt{59}$ である。

(答) $\sqrt{59}$

(2)

実数 s, t を用いて、

$$\overrightarrow{BH} = s\overrightarrow{BC} + t\overrightarrow{BD}$$

と表す。このとき、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AH} &= \overrightarrow{BH} - \overrightarrow{BA} \\ &= -\overrightarrow{BA} + s\overrightarrow{BC} + t\overrightarrow{BD} \end{aligned}$$

である。ここで、辺 AH と平面 BCD は垂直であるから、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} &= 0 \\ \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BD} &= 0 \end{aligned}$$

が成立する。それぞれ計算すると、 $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ から

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} &= 0 \\ \Leftrightarrow (-\overrightarrow{BA} + s\overrightarrow{BC} + t\overrightarrow{BD}) \cdot \overrightarrow{BC} &= 0 \\ \Leftrightarrow -\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} + s|\overrightarrow{BC}|^2 + t\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BD} &= 0 \\ \Leftrightarrow -28 + 49s + 35t &= 0 \\ \Leftrightarrow 7s + 5t &= 4 \end{aligned}$$

となり、 $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$ から

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BD} &= 0 \\ \Leftrightarrow (-\overrightarrow{BA} + s\overrightarrow{BC} + t\overrightarrow{BD}) \cdot \overrightarrow{BD} &= 0 \\ \Leftrightarrow -\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BD} + s\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BD} + t|\overrightarrow{BD}|^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow -40 + 35s + 65t &= 0 \\ \Leftrightarrow 7s + 13t &= 8 \end{aligned}$$

となる。この 2 式より、 $(s, t) = \left(\frac{3}{14}, \frac{1}{2}\right)$ となるから、

$$\overrightarrow{BH} = \frac{3}{14}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$$

と表される。

(答) $\overrightarrow{BH} = \frac{3}{14}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$

(3)

(2) の結果より、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CH} &= \overrightarrow{BH} - \overrightarrow{BC} \\ &= -\frac{11}{14}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{CH}|^2 &= \left| -\frac{11}{14}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} \right|^2 \\ &= \left(\frac{11}{14}\right)^2 |\overrightarrow{BC}|^2 - 2 \cdot \frac{11}{14} \cdot \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BD} + \frac{1}{4} |\overrightarrow{BD}|^2 \\ &= \frac{11^2}{2^2 \cdot 7^2} \cdot 7^2 - 2 \cdot \frac{11}{14} \cdot \frac{1}{2} \cdot 35 + \frac{1}{4} \cdot 65 \\ &= 19 \\ \therefore |\overrightarrow{CH}| &= \sqrt{19} \end{aligned}$$

より、線分 CH の長さは $\sqrt{19}$ である。

(答) $\sqrt{19}$

(4)

(3) の結果より、直角三角形 ACH に関して、三平方の定理から

$$\begin{aligned} AH &= \sqrt{AC^2 - CH^2} \\ &= \sqrt{59 - 19} \\ &= 2\sqrt{10} \end{aligned}$$

となる。また、直角三角形 ABH に関して、三平方の定理から

$$\begin{aligned} BH &= \sqrt{AB^2 - AH^2} \\ &= \sqrt{66 - 40} \\ &= \sqrt{26} \end{aligned}$$

となる。一方、点 H から直線 BC におろした垂線の足を T とおく。さらに、 $BC = 7$ より実数 x を用いて $BT = x$, $CT = 7 - x$ とおく。このとき、直角三角形 BTH に関する三平方の定理より

$$\begin{aligned} HT^2 &= BH^2 - BT^2 \\ &= 26 - x^2 \end{aligned}$$

となり、三角形 CTH に関する三平方の定理より

$$\begin{aligned} HT^2 &= CH^2 - CT^2 \\ &= 19 - (7 - x)^2 \end{aligned}$$

となるから、

$$\begin{aligned} 26 - x^2 &= 19 - (7 - x)^2 \\ \therefore x &= 4 \end{aligned}$$

である。よって、

$$HT = \sqrt{26 - 4^2} = \sqrt{10}$$

である。ここで図より、面 ABC を直線 AH のまわりに 1 回転させてできる立体の形状は、 $BH > CH$ であることに注意すると、直角三角形 ABH を直線 AH のまわりに 1 回転させてできる円錐から、直角三角形 ATH を直線 AH のまわりに 1 回転させてできる円錐をくり抜いた形となる。したがって、求める体積 V は

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3}\pi \cdot BH^2 \cdot AH - \frac{1}{3}\pi \cdot TH^2 \cdot AH \\ &= \frac{2\sqrt{10}}{3}\pi \cdot \left\{ (\sqrt{26})^2 - (\sqrt{10})^2 \right\} \\ &= \frac{32\sqrt{10}}{3}\pi \end{aligned}$$

である。

(答) $\frac{32\sqrt{10}}{3}\pi$