平成27年度

前　期　日　程

数　　学　(120分)

注　意　事　項

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子を開いてはいけません。
2. 問題は，1ページから4ページまであります。解答用紙は，前1，前2，前3，前4の4枚からなっています。ページの脱落等に気付いたときは，手をあげて監督者に知らせなさい。
3. 解答はすべて，各問題の解答用紙の解答欄に記入しなさい。
   なお，解答用紙の裏にも解答を記入する場合には，表と上下を逆にして記入しなさい。
4. 監督者の指示に従って，すべての解答用紙の該当欄に志望学科名及び受験番号(2か所)を左詰めで記入しなさい。
5. 解答用紙の網掛け部分及び※を付した欄には，何も記入してはいけません。
6. 試験終了後，この問題冊子は持ち帰りなさい。

1 (1) $x \geqq 1$ のとき，不等式 $2\sqrt{x} > 1 + \log x$ が成り立つことを証明せよ。

(2) 関数 $y = x\log x\ (x > 0)$ のグラフを曲線 C とする。定数 a に対し，曲線 C の接線で点 $(a,\ 0)$ を通るものは何本あるか。

(3) (2)で定められた曲線 C とその傾き 2 の接線および直線 $x = e^{-2}$ で囲まれた部分の面積を求めよ。

2 2つの関数

$$f(x)=\frac{2}{2x+3},\qquad g(x)=\frac{2x+1}{-x+2}$$

がある。

(1) 関数 $g(x)$ の逆関数 $g^{-1}(x)$ を求めよ。

(2) 合成関数 $g^{-1}(f(g(x)))$ を求めよ。

(3) 実数 c が無理数であるとき，$f(c)$ は無理数であることを証明せよ。

(4) 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$a_1=g(\sqrt{2}),\qquad a_{n+1}=f(a_n)\qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

(5) (4)で定められた数列 $\{a_n\}$ の極限 $\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ。

3 Ⅰ　次の５つの定積分を求めよ。（Ⅱ(4)で用いる。）

$$I_1 = \int_0^{\pi} x \sin x \, dx, \quad I_2 = \int_0^{\pi} x^2 \cos x \, dx, \quad I_3 = \int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx$$

$$I_4 = \int_0^{\pi} x \cos x \sin x \, dx, \quad I_5 = \int_0^{\pi} \sin^2 x \cos x \, dx$$

Ⅱ　関数 $y = \sin x$ のグラフを曲線 C とする。C 上の点 O(0, 0) における接線を ℓ_1，点 A(π, 0) における接線を ℓ_2 とする。

ℓ_1 と ℓ_2 の交点を B，C 上の点 P(t, $\sin t$) ($0 \leqq t \leqq \pi$) から ℓ_1 に下ろした垂線を PQ とする。ただし，$t = 0$ のときは Q = P とする。OQ = s とおく。

(1)　∠OBA の大きさを求めよ。

(2)　s を t を用いて表せ。

(3)　線分 PQ の長さを t を用いて表せ。

(4)　曲線 C と２直線 ℓ_1，ℓ_2 で囲まれた部分を，直線 ℓ_1 の周りに１回転させてできる立体の体積 V を求めよ。

4 四面体 ABCD は

(i) $BA = \sqrt{66}$,　$BC = 7$,　$BD = \sqrt{65}$

(ii) $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 28$,　$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BD} = 35$,　$\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BA} = 40$

を満たす。頂点 A から平面 BCD に下ろした垂線を AH とする。

(1) 辺 AC の長さを求めよ。

(2) $\overrightarrow{BH}$ を $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BD}$ を用いて表せ。

(3) 線分 CH の長さを求めよ。

(4) 面 ABC を直線 AH の周りに 1 回転させるとき，面 ABC が通過する部分の体積 V を求めよ。