

平成 27 年度

後 期 日 程

数 学 (120 分)

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
2. 問題は、1 ページから 4 ページまであります。解答用紙は、後 1 ,
後 2 , 後 3 , 後 4 の 4 枚からなっています。ページの脱落等に気付いたときは、手をあげて監督者に知らせなさい。
3. 解答はすべて、各問題の解答用紙の解答欄に記入しなさい。
なお、解答用紙の裏にも解答を記入する場合には、表と上下を逆にして記入しなさい。
4. 監督者の指示に従って、すべての解答用紙の該当欄に志望学科名及び受験番号 (2 か所) を記入しなさい。
5. 解答用紙の網掛け部分及び※を付した欄には、何も記入してはいけません。
6. 試験終了後、この問題冊子は持ち帰りなさい。

- 1 座標平面上に2点 $A(2, 0)$, $B(3, 0)$ がある。 a は定数とし、直線 ℓ と曲線 C を

$$\ell: y = x + a$$

$$C: y = \sqrt{1 - (x - 2)^2} \quad (1 < x < 3)$$

とする。曲線 C 上の点 $P(s, t)$ から直線 $x = 2$ に下ろした垂線を PQ とする。ただし、 $s = 2$ のときは $Q = P$ とする。

- (1) 直線 ℓ が曲線 C に接するときの a の値と接点の座標を求めよ。
- (2) 2 直線 AP , BQ の交点 R の座標を s を用いて表せ。
- (3) 点 P が曲線 C 上を動くとき、(2) で定められた点 R の描く曲線 K の方程式を求めよ。
- (4) 曲線 C と(3) で定められた曲線 K を合わせた図形を F とする。直線 ℓ と図形 F がただ1つの共有点をもつような a の値の範囲を求めよ。

2

(1) 関数 $y = xe^{2-x}$ の極値を求めよ。

(2) 関数 $y = xe^{2-x}$ のグラフを曲線 C とする。曲線 C が上に凸であるような x の範囲を求めよ。

(3) $a > 0$ とする。定積分

$$I_n = \int_0^a x^n e^{-x} dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

について、 I_{n+1} を I_n を用いて表せ。

(4) (3)で定められた定積分 I_n について、 I_2, I_3 を求めよ。

(5) (2)で定められた曲線 C と y 軸および直線 $y = e$ で囲まれた部分を、 y 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積 V を求めよ。

3 座標空間内に4点 $A(0, 0, 1)$, $B(0, 1, 1)$, $C(2, 0, 1)$, $D(2, 0, 0)$ がある。

(1) 四面体 $ABCD$ の体積 V を求めよ。

(2) 四面体 $ABCD$ の表面積 S を求めよ。

(3) $0 < t < 2$ とする。点 $(t, 0, 0)$ を通り yz 平面に平行な平面によって四面体 $ABCD$ を分割する。分割してできた2つの立体のうち、点 A を含む立体の体積を $W(t)$ とおく。 $W(t)$ の変化率が最大になる t の値と、そのときの $W(t)$ の値を求めよ。

4 自然数 n に対し, x の n 次式で表された関数 $f_n(x)$ を

$$f_n(\cos \theta) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin \theta} \quad (0 < \theta < \pi)$$

を満たすように定める。例えば

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta \quad \text{であるから} \quad f_1(x) = 2x$$

$$\sin 3\theta = \sin \theta (4 \cos^2 \theta - 1) \quad \text{であるから} \quad f_2(x) = 4x^2 - 1$$

となる。

(1) 3 次式 $f_3(x)$ を求めよ。

(2) 定積分 $I = \int_0^{\frac{1}{2}} f_3(x) \sqrt{1-x^2} dx$ を求めよ。

(3) k が自然数のとき, $f_{2k+1}(0) = 0$ であることを証明せよ。

(4) k が自然数のとき, 整式 $f_{2k+1}(x)$ は整式 $f_k(2x^2 - 1)$ で割り切れることを証明せよ。

(5) 5 次方程式 $f_5(x) = 0$ を解け。

