

1

(1)

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2+1}$$

$$f'(x) = \frac{(x-1)'(x^2+1) - (x-1)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \frac{-(x^2-2x-1)}{(x^2+1)^2}$$

となるので、 $f'(x)=0$ のとき、 $x=1\pm\sqrt{2}$ のときである。したがって、増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	$1-\sqrt{2}$	$\cdots$	$1+\sqrt{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	極小	$\nearrow$	極大	$\searrow$

また、

$$f(1-\sqrt{2}) = \frac{(1-\sqrt{2})-1}{(1-\sqrt{2})^2+1} = \frac{-\sqrt{2}}{4-2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}+1}{2}$$

$$f(1+\sqrt{2}) = \frac{(1+\sqrt{2})-1}{(1+\sqrt{2})^2+1} = \frac{\sqrt{2}}{4+2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$$

である。

$$(\text{答}) \text{ 極大値 } \frac{\sqrt{2}-1}{2} \quad \text{極小値 } -\frac{\sqrt{2}+1}{2}$$

(2)

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{-(x^2-2x-1)'(x^2+1)^2 + (x^2-2x-1)\{(x^2+1)^2\}'}{(x^2+1)^4} \\ &= \frac{-(2x-2)(x^2+1)^2 + (x^2-2x-1) \cdot 2(x^2+1) \cdot 2x}{(x^2+1)^4} \\ &= \frac{2(x^3-3x^2-3x+1)}{(x^2+1)^3} \\ &= \frac{2(x+1)(x^2-4x+1)}{(x^2+1)^3} \end{aligned}$$

となるので、 $f''(x)=0$ のとき、 $x=-1, 2\pm\sqrt{3}$ であるから、増減表は次の通りとなる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	$1-\sqrt{2}$	$\cdots$	$2-\sqrt{3}$	$\cdots$	$1+\sqrt{2}$	$\cdots$	$2+\sqrt{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$

したがって、変曲点は、 $(-1, f(-1)), (1-\sqrt{2}, f(1-\sqrt{2})), (1+\sqrt{2}, f(1+\sqrt{2}))$ となる。また、

$$f(-1) = -1$$

$$f(2-\sqrt{3}) = -\frac{1+\sqrt{3}}{4}$$

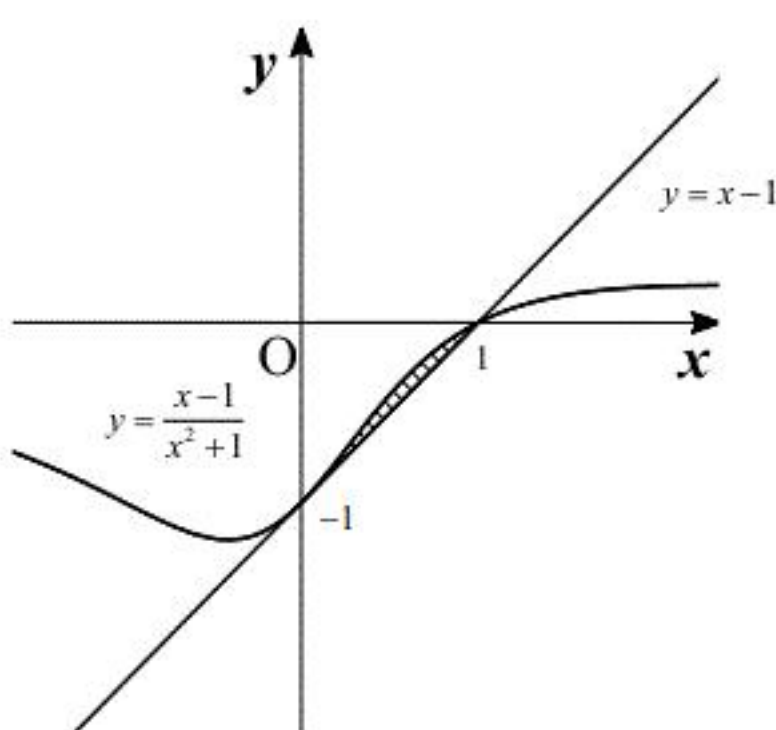
$$f(2+\sqrt{3}) = \frac{-1+\sqrt{3}}{4}$$

である。

$$(\text{答}) (-1, -1), \left(2-\sqrt{3}, -\frac{1+\sqrt{3}}{4}\right), \left(2+\sqrt{3}, \frac{-1+\sqrt{3}}{4}\right)$$

(3)

$f(0)=-1, f'(0)=1$ より、接線 ℓ の方程式は、 $y=x-1$ となる。 $f(0)=-1, f(1)=0$ に注意して曲線 C と接線 ℓ のグラフを書くと次の通りである。



よって、求める面積 S は、

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 \left\{ \frac{x-1}{x^2+1} - (x-1) \right\} dx \\ &= \int_0^1 \left(\frac{x}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+1} - x + 1 \right) dx \end{aligned}$$

と表せる。ここで、

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx &= \int_0^1 \frac{1}{2} \frac{(x^2+1)'}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} [\log(x^2+1)]_0^1 = \frac{1}{2} \log 2 \\ \int_0^1 (-x+1) dx &= \left[-\frac{1}{2}x^2 + x \right]_0^1 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

である。また、 $\int_0^1 \frac{1}{x^2+1} dx$ について、 $x=\tan\theta$ と置換すると、 $dx = \frac{d\theta}{\cos^2\theta}$ 、

$$\begin{array}{c|ccc} x & 0 & \rightarrow & 1 \\ \hline \theta & 0 & \rightarrow & \frac{\pi}{4} \end{array}$$

であるから、

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2+1} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\tan^2\theta+1} \cdot \frac{1}{\cos^2\theta} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta = [\theta]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4}$$

となる。したがって、

$$S = \frac{1}{2} \log 2 - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$$

である。

$$(\text{答}) \frac{1}{2} \log 2 - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$$

(1)

数学的帰納法を利用して、 $a_n > 3$ であることを示す。

[1] $n=1$ のとき

$$a_1 = 4 > 3 \text{ より成り立つ。}$$

[2] $n=k$ のとき成り立つと仮定する。すると $n=k+1$ のとき、

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= \frac{(3k+4)a_k - 9k - 6}{(k+1)a_k - 3k - 1} \\ &= \frac{3\{(k+1)a_k - 3k - 1\} + a_k - 3}{(k+1)a_k - 3k - 1} \\ &= 3 + \frac{a_k - 3}{(k+1)a_k - 3k - 1} \\ &= 3 + \frac{a_k - 3}{(k+1)(a_k - 3) + 2} \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

であり、仮定より $a_k > 3$ であるから $a_{k+1} > 3$ となるので、 $n=k+1$ のときも成り立つ。

したがって、[1], [2]より題意は示された。

(証明終)

(2)

①より $a_{n+1} - 3 = \frac{a_n - 3}{(n+1)(a_n - 3) + 2}$ であり、 $a_n - 3 = \frac{1}{b_n}$ であるから代入して、

$$\begin{aligned} \frac{1}{b_{n+1}} &= \frac{\frac{1}{b_n}}{(n+1) \cdot \frac{1}{b_n} + 2} \\ \Leftrightarrow b_{n+1} &= 2b_n + n + 1 \end{aligned}$$

となる。

(答) $b_{n+1} = 2b_n + n + 1$

(3)

$$\begin{aligned} c_{n+1} &= b_{n+2} - b_{n+1} \\ &= (2b_{n+1} + n + 2) - (2b_n + n + 1) \\ &= 2(b_{n+1} - b_n) + 1 \\ &= 2c_n + 1 \end{aligned}$$

であり、

$$\begin{aligned} c_{n+1} &= 2c_n + 1 \\ \Leftrightarrow c_{n+1} + 1 &= 2(c_n + 1) \end{aligned}$$

となるから、数列 $\{c_n + 1\}$ は初項 $c_1 + 1 = b_2 - b_1 + 1 = 4 - 1 + 1 = 4$ 、公比 2 の等比数列である。したがって、

$$\begin{aligned} c_n + 1 &= 4 \cdot 2^{n-1} \\ \Leftrightarrow c_n &= 2^{n+1} - 1 \end{aligned}$$

となる。

(答) $c_n = 2^{n+1} - 1$

(4)

$b_{n+1} - b_n = 2^{n+1} - 1$ と $b_{n+1} = 2b_n + n + 1$ より、 b_{n+1} を消去して、 $b_n = 2^{n+1} - n - 2$ であり、

$$\begin{aligned} a_n - 3 &= \frac{1}{b_n} \\ &= \frac{1}{2^{n+1} - n - 2} \\ \therefore a_n &= \frac{1}{2^{n+1} - n - 2} + 3 \end{aligned}$$

となる。

(答) $a_n = \frac{1}{2^{n+1} - n - 2} + 3$

(1)

$\overrightarrow{OP} = t\overrightarrow{OB} = (t, 0, -t)$ より, $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = (t-1, -2, -t-2)$, $\overrightarrow{AC} = (1, -3, -1)$ であるから,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AP} &= (1, -3, -1) \cdot (t-1, -2, -t-2) \\ &= (t-1) + 6 - (-t-2) \\ &= 2t+7\end{aligned}$$

となる。

(答) $2t+7$

(2)

$$\begin{aligned}S(t) &= \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{AC}|^2 |\overrightarrow{AP}|^2 - (\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AP})^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\{1^2 + (-3)^2 + (-1)^2\} \{(t-1)^2 + (-2)^2 + (-t-2)^2\} - (2t+7)^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{18t^2 - 6t + 50} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{18 \left(t - \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{99}{2}}\end{aligned}$$

であるから, $S(t)$ は $t = \frac{1}{6}$ のとき, 最小値 $\frac{1}{2} \sqrt{\frac{99}{2}} = \frac{3\sqrt{22}}{4}$ をとる。

(答) $t = \frac{1}{6}$ のとき 最小値 $\frac{3\sqrt{22}}{4}$

(3)

線分 QR の長さが最小となるとき, $QR \perp AC$ かつ $QR \perp OB$ が成り立つ。点 Q と直線 AC の距

離を r とすると, $S(t) = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AC}| r$ より r が最小になるとき $S(t)$ も最小であるから, (2) より $t = \frac{1}{6}$

のときの点 P が点 Q となる。実数 s を用いて

$$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OA} + s\overrightarrow{AC} = (s+1, -3s+2, -s+2)$$

とおくと, $QR \perp OB$, $\overrightarrow{OQ} = \left(\frac{1}{6}, 0, -\frac{1}{6}\right)$ より,

$$QR \perp OB$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{QR} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(s + \frac{5}{6}, -3s + 2, -s + \frac{13}{6}\right) \cdot (1, 0, -1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2s - \frac{4}{3} = 0$$

$$\Leftrightarrow s = \frac{2}{3}$$

である。このとき $\overrightarrow{QR} = \left(\frac{3}{2}, 0, \frac{3}{2}\right)$ であるから, $|\overrightarrow{QR}| = \sqrt{2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{3}{\sqrt{2}}$ となる。また,

$\overrightarrow{OR} = \left(\frac{5}{3}, 0, \frac{4}{3}\right)$ より, $R\left(\frac{5}{3}, 0, \frac{4}{3}\right)$ である。

(答) 最小値 $\frac{3}{\sqrt{2}}$ $R\left(\frac{5}{3}, 0, \frac{4}{3}\right)$

4

(1)

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{1}{2} + \cos t + i \sin t\right)^2 &= \frac{1}{4} + (\cos t + i \sin t) + (\cos t + i \sin t)^2 \\
 &= \frac{1}{4} + (\cos t + i \sin t) + \cos^2 t + 2i \sin t \cos t - \sin^2 t \\
 &= \left(\frac{1}{4} + \cos t + \cos 2t\right) + i(\sin t + \sin 2t)
 \end{aligned}$$

より, $f(t) = \frac{1}{4} + \cos t + \cos 2t$, $g(t) = \sin t + \sin 2t$ である。また,

$$\begin{aligned}
 f'(t) &= -\sin t - 2\sin 2t \\
 &= -\sin t - 4\sin t \cos t \\
 &= -\sin t(1 + 4\cos t)
 \end{aligned}$$

であるから, $f'(t) = 0$ とすると, $\sin t = 0$ または $\cos t = -\frac{1}{4}$ となる。 $\cos t = -\frac{1}{4}$ を満たす t は 0

$\leq t \leq \pi$ に一つ存在するので, それを α とおくと増減表は次のようになる。

t	0	$\cdots$	α	$\cdots$	π
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$		$\searrow$		$\nearrow$	

$f(0) = \frac{9}{4}$, $f(\pi) = \frac{1}{4}$ であり, $\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = 2\left(-\frac{1}{4}\right)^2 - 1 = -\frac{7}{8}$ より, $f(\alpha) = -\frac{7}{8}$ となる。

したがって, $f(t)$ ($0 \leq t \leq \pi$) のとりうる値の範囲は, $-\frac{7}{8} \leq f(t) \leq \frac{9}{4}$ である。

$$(\text{答}) \quad -\frac{7}{8} \leq f(t) \leq \frac{9}{4}$$

(2)

$g'(t) = \cos t + 2\cos 2t$ であるから,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{g'(t)}{f'(t)} = \frac{\cos t + 2\cos 2t}{-\sin t - 2\sin 2t}$$

と表せる。 $t = \frac{\pi}{3}$ のとき,

$$\frac{\cos \frac{\pi}{3} + 2\cos \frac{2}{3}\pi}{-\sin \frac{\pi}{3} - 2\sin \frac{2}{3}\pi} = \frac{1}{3\sqrt{3}}$$

である。また, $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{4}$, $g\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$ であるから, 求める接線の方程式は,

$$\begin{aligned}
 y - \sqrt{3} &= \frac{1}{3\sqrt{3}} \left(x - \frac{1}{4}\right) \\
 \Leftrightarrow y &= \frac{1}{3\sqrt{3}}x + \frac{35\sqrt{3}}{36}
 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad y = \frac{1}{3\sqrt{3}}x + \frac{35\sqrt{3}}{36}$$

(3)

$g(t) \leq 0$ とすると,

$$\sin t(1 + 2\cos t) \leq 0$$

となる。 $\sin t \geq 0$ より,

$$\sin t = 0 \text{ または } \cos t \leq -\frac{1}{2}$$

$$\therefore t = 0, \quad \frac{2}{3}\pi \leq t \leq \pi$$

である。また, $g'(t) = 0$ とすると,

$$\begin{aligned}
 \cos t + 2(2\cos^2 t - 1) &= 0 \\
 \Leftrightarrow 4\cos^2 t + \cos t - 2 &= 0 \\
 \Leftrightarrow \cos t &= \frac{-1 \pm \sqrt{33}}{8}
 \end{aligned}$$

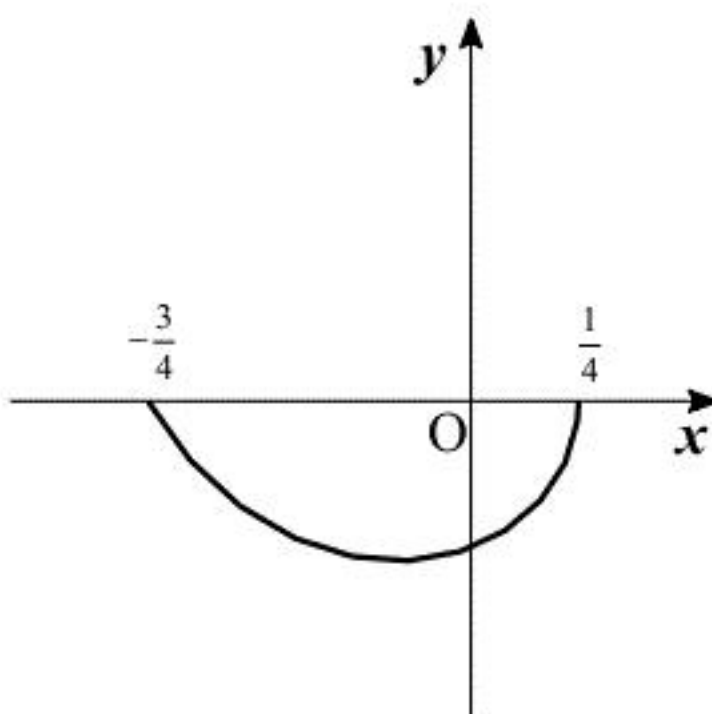
となる。 $-1 < \frac{-1 - \sqrt{33}}{8} < -\frac{1}{2} < -\frac{-1 + \sqrt{33}}{8}$ より, $\cos \beta = \frac{-1 - \sqrt{33}}{8}$ ($\frac{2}{3}\pi < \beta < \pi$) とすると, $\frac{2}{3}\pi \leq$

$t \leq \pi$ での (x, y) の増減は次のようになる。

t	$\frac{2}{3}\pi$	$\cdots$	β	$\cdots$	π
$\frac{dx}{dt}$		$+$		$+$	
$\frac{dy}{dt}$		$-$	0	$+$	
(x, y)		$\searrow$		$\nearrow$	

$t = \frac{2}{3}\pi$ のとき, $(x, y) = \left(-\frac{3}{4}, 0\right)$, $t = \pi$ のとき, $(x, y) = \left(\frac{1}{4}, 0\right)$ より, 曲線 C の $\frac{2}{3}\pi \leq t \leq \pi$

でのグラフの概形は次のようになる。



したがって, 求める面積 S は,

$$\begin{aligned}
 S &= \int_{-\frac{3}{4}}^{\frac{1}{4}} -y dx \\
 &= \int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi} -g(t)f'(t) dt \\
 &= \int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi} \sin t(1 + 2\cos t)\sin t(1 + 4\cos t) dt \\
 &= \int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi} \sin^2 t(1 + 6\cos t + 8\cos^2 t) dt \\
 &= \int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi} \left\{ \sin^2 t + 6\sin^2 t \cos t + 2(\sin 2t)^2 \right\} dt \\
 &= \int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi} \left\{ \left(\frac{1 - \cos 2t}{2} \right) + 6\sin^2 t \cos t + (1 - \cos 4t) \right\} dt \\
 &= \left[\frac{3}{2}t - \frac{1}{4}\sin 2t - \frac{1}{4}\sin 4t + 2\sin^3 t \right]_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi} \\
 &= \frac{\pi}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{4}
 \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{\pi}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{4}$$