

1

(1)

$z \neq 0$ であるため、両辺に z をかけて二次方程式を解くと、

$$\begin{aligned} z + \frac{1}{z} &= \sqrt{3} \\ \Leftrightarrow z^2 - \sqrt{3}z + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow z &= \frac{\sqrt{3} \pm i}{2} \end{aligned}$$

とできる。よって、極形式を使って $z = \cos\left(\pm\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\pm\frac{\pi}{6}\right)$ (複号同順, 以下同様) と表せる。

したがって、ド・モアブルの定理を用いて、

$$\begin{aligned} \alpha &= z^{100} + \frac{1}{z^{100}} \\ &= \left\{ \cos\left(\pm\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\pm\frac{\pi}{6}\right) \right\}^{100} + \left\{ \cos\left(\pm\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\pm\frac{\pi}{6}\right) \right\}^{-100} \\ &= \cos\left(\pm\frac{100\pi}{6}\right) + i\sin\left(\pm\frac{100\pi}{6}\right) + \cos\left(\pm\frac{100\pi}{6}\right) + (-1)i\sin\left(\pm\frac{100\pi}{6}\right) \\ &= 2\cos\left(\pm\frac{100\pi}{6}\right) \\ &= 2\cos\left(\frac{4\pi}{6}\right) \\ &= 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= -1 \end{aligned}$$

となる。

(答) z の値 $\frac{\sqrt{3} \pm i}{2}$, α の値 -1

(2)

$r > 0$ を満たす実数 r と、 $0 \leq \theta < 2\pi$ を満たす θ を用いて、 z を極形式で $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ と表す。このとき、

$$\begin{aligned} z + \frac{1}{z} &= r(\cos\theta + i\sin\theta) + \frac{1}{r(\cos\theta + i\sin\theta)} \\ &= r(\cos\theta + i\sin\theta) + \frac{1}{r}\{\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)\} \\ &= \left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\theta + i\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\theta \end{aligned}$$

となる。 $z + \frac{1}{z}$ が実数となるためには、 $z + \frac{1}{z}$ の虚部が 0 すなわち、 $\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\theta = 0$ となればよい。

ここで、

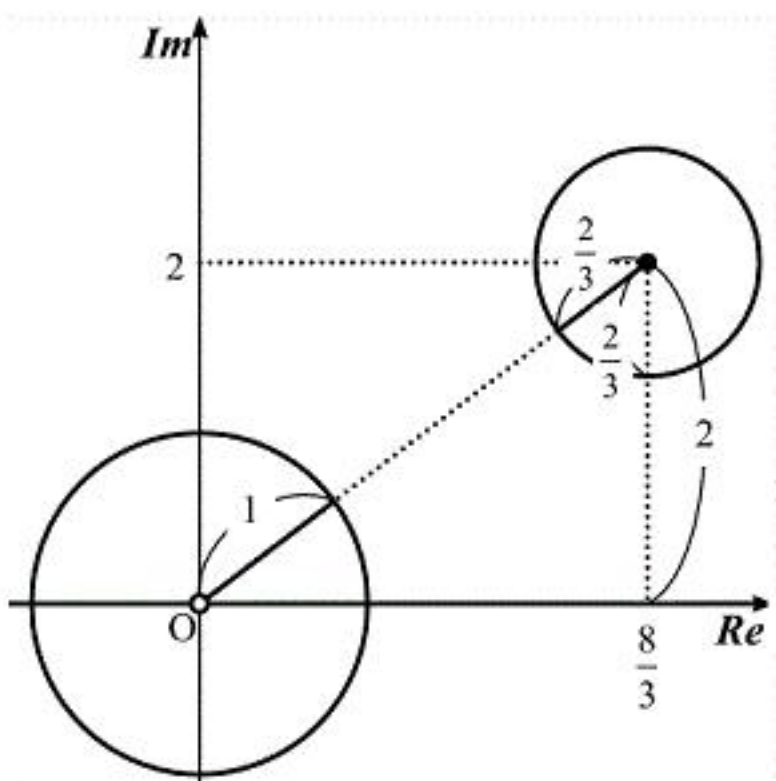
$$\begin{aligned} \left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\theta &= 0 \\ \Leftrightarrow r - \frac{1}{r} &= 0, \sin\theta = 0 \\ \Leftrightarrow r^2 - 1 &= 0, \sin\theta = 0 \\ \therefore r &= 1, \sin\theta = 0 \quad (\because r > 0) \end{aligned}$$

と変形できる。 $z \neq 0$ に注意すると、 $r = 1, \sin\theta = 0$ となるためには、 z が原点を中心とした半径 1 の円、または原点を除いた実軸上にあればよい。ゆえに、これが求める図形となる。

(答) 原点を中心とした半径 1 の円と、原点を除いた実軸部分

(3)

$\left|w - \left(\frac{8}{3} + 2i\right)\right| = \frac{2}{3}$ が表す図形と、 $z + \frac{1}{z}$ が実数となるような z の表す図形を図示すると以下のようになる。



$|z - w|$ の最小値は $\left|w - \left(\frac{8}{3} + 2i\right)\right| = \frac{2}{3}$ が表す図形上の点と、 $z + \frac{1}{z}$ が実数となるような z の表す

図形上の点の距離の最小値を意味するが、図よりそれは $\frac{8}{3} + 2i$ を中心とした半径 $\frac{2}{3}$ の円上の

点と実軸上の点の距離の最小値か、 $\frac{8}{3} + 2i$ を中心とした半径 $\frac{2}{3}$ の円上の点と原点を中心とし

た半径 1 の円上の点の距離の最小値の小さい方である。 $\frac{8}{3} + 2i$ を中心とした半径 $\frac{2}{3}$ の円と実軸

の最短距離は、図より $2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$ である。 $\frac{8}{3} + 2i$ を中心とした半径 $\frac{2}{3}$ の円と原点を中心とした

半径 1 の円の最短距離は、図より 2 つの円の中心を結ぶ線分上の点を選ぶ場合で、それぞれ

の中心 2 点間の距離からそれぞれの半径を引いた値となるので、 $\sqrt{\left(\frac{8}{3}\right)^2 + 2^2} - 1 - \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$ とな

る。以上の議論により、 $|z - w|$ の最小値は $\frac{4}{3}$ である。

(答) $\frac{4}{3}$

(1)

まず α を求める。 α は $x = \sqrt{2x+1}$ の解であるので $\alpha = \sqrt{2\alpha+1}$ が成立し、(右辺) > 0 より、 $\alpha > 0$ がいえて、

$$\begin{aligned}\alpha &= \sqrt{2\alpha+1} \\ \Leftrightarrow \alpha^2 &= 2\alpha+1 \\ \Leftrightarrow \alpha^2 - 2\alpha - 1 &= 0 \\ \therefore \alpha &= 1 + \sqrt{2} \quad (\because \alpha > 0)\end{aligned}$$

となる。つぎに、数学的帰納法を利用して、自然数 n に対して、

$$a_n > \alpha \quad \cdots \textcircled{1}$$

であることを示す。

[1] $n=1$ のとき

$$a_1 = 3 = 1 + \sqrt{4} > 1 + \sqrt{2} = \alpha \text{ より、} \textcircled{1} \text{ は成立する。}$$

[2] $n=k$ (k は自然数) で $\textcircled{1}$ が成立するとき

$a_k > \alpha > 0$ が成立し、また、 $f(x)$ が $x > 0$ で単調増加関数であるから、

$$a_{k+1} = f(a_k) > f(\alpha) = \alpha$$

が成立するので、 $a_{n+1} > \alpha$ が成立する。

よって、[1], [2] より、自然数 n に対して、 $a_n > \alpha$ である。

(証明終)

(2)

$a_{n+1} = \sqrt{2a_n+1}$, $\alpha = \sqrt{2\alpha+1}$ であることを利用して、

$$\begin{aligned}a_{n+1} - \alpha &= \sqrt{2a_n+1} - \sqrt{2\alpha+1} \\ &= \frac{2a_n+1 - (2\alpha+1)}{\sqrt{2a_n+1} + \sqrt{2\alpha+1}} \\ &= \frac{2(a_n - \alpha)}{\sqrt{2a_n+1} + \sqrt{2\alpha+1}} \\ &< \frac{2(a_n - \alpha)}{\sqrt{2\alpha+1} + \sqrt{2\alpha+1}} \quad (\because a_n > \alpha) \\ &= \frac{a_n - \alpha}{\sqrt{2\alpha+1}} \\ &< \frac{a_n - \alpha}{\sqrt{2 \cdot \frac{3}{2} + 1}} \quad \left(\because \alpha = 1 + \sqrt{2} > 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2}(a_n - \alpha)\end{aligned}$$

となる。したがって、題意は示された。

(証明終)

(3)

(1), (2) より、

$$0 < a_n - \alpha < \frac{1}{2}(a_{n-1} - \alpha) < \cdots < \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} (a_1 - \alpha)$$

とできる。ここで、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} (a_1 - \alpha) = 0$$

であるから、はさみうちの原理より、 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - \alpha) = 0$ であり、 $\{a_n\}$ は収束し、

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha = 1 + \sqrt{2}$ となる。

(答) $1 + \sqrt{2}$

3

(1)

$f(x)=\frac{1-x}{1+x}=-1+\frac{2}{1+x}$ より、 $f(x)$ は単調減少関数である。ゆえに、 $0 \leq x \leq 1$ の範囲における $f(x)$ の最小値は $f(1)=0$ 、最大値は $f(0)=1$ である。

(答) 最大値:1, 最小値:0

(2)

(1)より、 $0 \leq x \leq 1$ の範囲で $0 \leq f(x) \leq 1$ である。ゆえに、

$$\begin{aligned} g(0) &= \int_0^1 |f(x)-0| dx \\ &= \int_0^1 f(x) dx \\ &= \int_0^1 \left(-1+\frac{2}{1+x}\right) dx \\ &= \left[-x+2\log(1+x)\right]_0^1 \\ &= -1+2\log 2 \end{aligned}$$

であり、

$$\begin{aligned} g(1) &= \int_0^1 |f(x)-1| dx \\ &= \int_0^1 \{1-f(x)\} dx \\ &= \int_0^1 \left\{1-\left(-1+\frac{2}{1+x}\right)\right\} dx \\ &= \int_0^1 \left(2-\frac{2}{1+x}\right) dx \\ &= \left[2x-2\log(1+x)\right]_0^1 \\ &= 2-2\log 2 \end{aligned}$$

である。

(答) $g(0)=-1+2\log 2, g(1)=2-2\log 2$

(3)

$f(x)=\frac{1-x}{1+x}=-1+\frac{2}{1+x}$ について、 $\frac{2}{1+x} \neq 0$ であるから、 $f(x) \neq -1$ である。ゆえに、

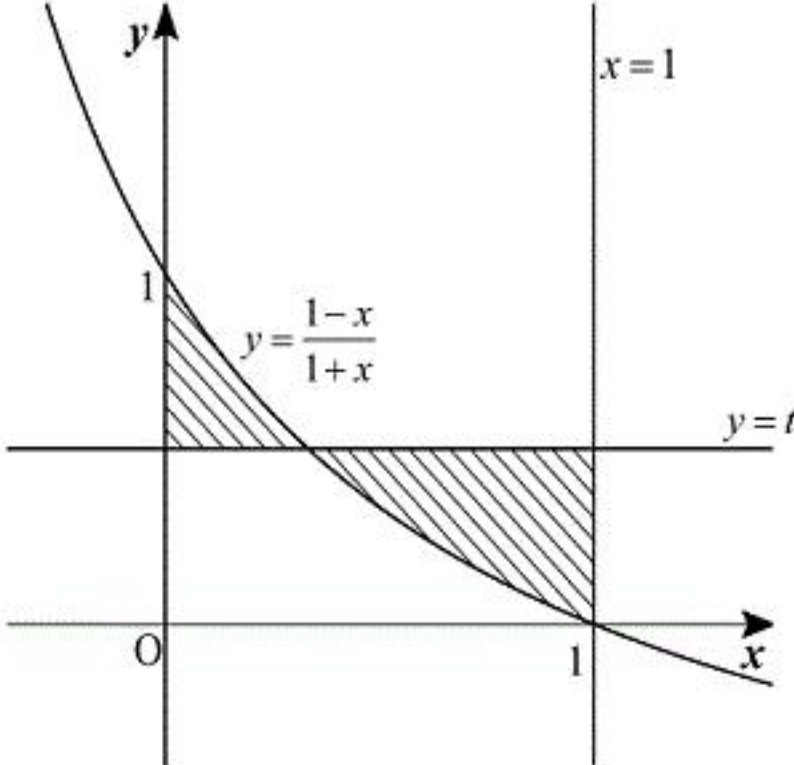
$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1-x}{1+x} \\ \Leftrightarrow (1+x)f(x) &= 1-x \\ \Leftrightarrow \{1+f(x)\}x &= 1-f(x) \\ \Leftrightarrow x &= \frac{1-f(x)}{1+f(x)} \quad (\because f(x) \neq -1 \Leftrightarrow 1+f(x) \neq 0) \end{aligned}$$

となる。したがって、逆関数の定義より $f^{-1}(x)=\frac{1-x}{1+x}$ とわかる。

(答) $f^{-1}(x)=\frac{1-x}{1+x}$

(4)

$f(\alpha)=t$ となるような α は、 $\alpha=f^{-1}(t)$ とできる。また、(3)より $f^{-1}(t)=f(t)$ でもある。



これと(1)より $f(x)$ が単調減少であることに注意して、

$$\begin{aligned} g(t) &= \int_0^t \{f(x)-t\} dx + \int_t^1 \{t-f(x)\} dx \\ &= \int_0^{f(t)} \{f(x)-t\} dx + \int_{f(t)}^1 \{t-f(x)\} dx \\ &= \left[-x+2\log(1+x)-tx\right]_0^{f(t)} + \left[tx+x-2\log(1+x)\right]_{f(t)}^1 \\ &= 2\left[-f(t)(t+1)+2\log\{1+f(t)\}\right] + t+1-2\log 2 \end{aligned}$$

とできる。さらに $g(t)$ を微分すると、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}g(t) &= 2\left\{-f(t)-f'(t)(t+1)+\frac{2f'(t)}{1+f(t)}\right\}+1 \\ &= 2\left\{-f(t)-f'(t)(t+1)+\frac{2f'(t)}{\frac{2}{1+t}}\right\}+1 \\ &= -2f(t)+1 \end{aligned}$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned} -2f(t)+1 &= 0 \\ \Leftrightarrow -2\cdot\frac{1-t}{1+t}+1 &= 0 \\ \Leftrightarrow -2+2t+1+t &= 0 \\ \Leftrightarrow 3t &= 1 \\ \Leftrightarrow t &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

であり、

$$\begin{aligned} g\left(\frac{1}{3}\right) &= 2\left[-f\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}+1\right)+2\log\left\{1+f\left(\frac{1}{3}\right)\right\}\right] + \frac{1}{3}+1-2\log 2 \\ &= 2\left[-\frac{2}{3}+2\log\frac{3}{2}\right] + \frac{4}{3}-2\log 2 \\ &= 4\log 3-6\log 2 \end{aligned}$$

であるため、増減表は次のようになる。

t	0	...	$\frac{1}{3}$	...	1
$\frac{d}{dt}g(t)$		-	0	+	
$g(t)$	$-1+2\log 2$	$\searrow$	$4\log 3-6\log 2$	$\nearrow$	$2-2\log 2$

したがって、最小値は $4\log 3-6\log 2$ となる。

(答) $4\log 3-6\log 2$

4

(1)

$|\vec{a}|, |\vec{b}|$ を求めると,

$$|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 0^2 + 4^2} = 5, |\vec{b}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2} = 3$$

であることから, 直線 OG は $\angle AOB$ の二等分線で G は辺 AB 上の点であるから G は AB を

$OA:OB=5:3$ に内分する。したがって, $\overrightarrow{OG} = \frac{3}{8}\vec{a} + \frac{5}{8}\vec{b}$ となる。ゆえに,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OG} &= \frac{3}{8}(3, 0, 4) + \frac{5}{8}(1, -2, 2) \\ &= \left(\frac{7}{4}, -\frac{5}{4}, \frac{11}{4}\right) \end{aligned}$$

であり, 点 G の座標は $\left(\frac{7}{4}, -\frac{5}{4}, \frac{11}{4}\right)$ である。

$$\text{(答)} \quad \overrightarrow{OG} = \frac{3}{8}\vec{a} + \frac{5}{8}\vec{b}, \text{ 座標: } \left(\frac{7}{4}, -\frac{5}{4}, \frac{11}{4}\right)$$

(2)

α に垂直な, 長さが $\sqrt{26}$ であるベクトルの1つを $\vec{h} = (x_0, y_0, z_0)$ とおくと,

$\vec{h} \cdot \overrightarrow{OA} = 0, \vec{h} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$ より,

$$\begin{aligned} &\begin{cases} 3x_0 + 4z_0 = 0 \\ x_0 - 2y_0 + 2z_0 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 3y_0 = z_0 \\ -4y_0 = x_0 \end{cases} \\ &\therefore \vec{h} = (-4y_0, y_0, 3y_0) \end{aligned}$$

となる。ここで,

$$\begin{aligned} |\vec{h}| &= \sqrt{26} \\ \Leftrightarrow \sqrt{16y_0^2 + y_0^2 + 9y_0^2} &= \sqrt{26} \\ \Leftrightarrow \sqrt{26}|y_0| &= \sqrt{26} \\ \Leftrightarrow |y_0| &= 1 \end{aligned}$$

より, $y_0 = 1$ は題意を満たす。このとき, $\vec{h} = (-4, 1, 3)$ である。

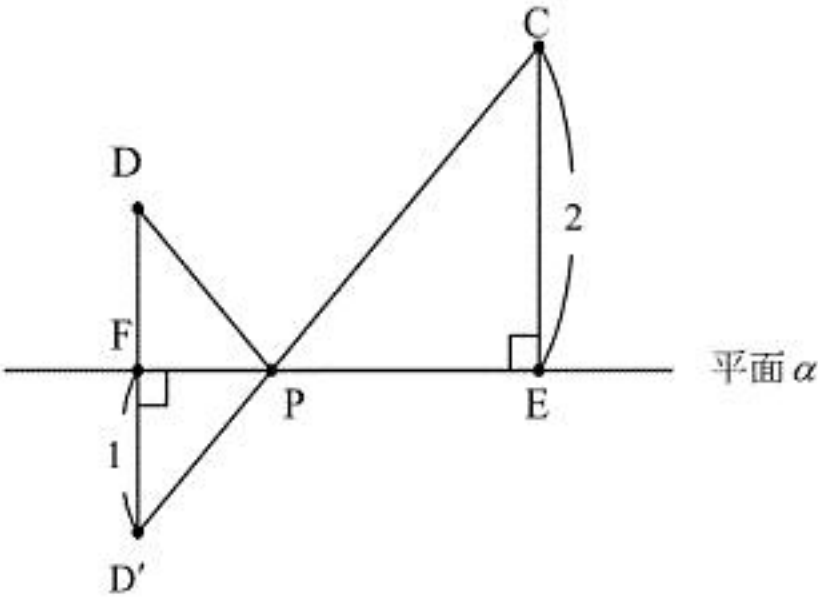
$$\text{(答)} \quad \vec{h} = (-4, 1, 3)$$

(3)

平面 α に関して, 点 D と対称な点を D' とする。このとき, 平面上の点 P' に関して, $DP' = D'P'$ が成り立つ。また, 直線 $D'C$ と平面 α の交点を P_0 とすれば, $P' \neq P_0$ であるとき, $\triangle D'P'C$ に関する三角形の成立条件より,

$$\begin{aligned} D'C &< D'P' + P'C \\ \Leftrightarrow D'P_0 + P_0C &< D'P' + P'C \\ \Leftrightarrow DP_0 + P_0C &< DP' + P'C \end{aligned}$$

が成り立ち, これは点 C から平面 α 上の点を通り点 D へ行く最短経路について, このときに通る平面 α 上の点 P が P_0 に一致していることを意味している。したがって, C, D', E, F, P の位置関係は次の図のようになる。



DD' と CE は平行であるから, $EP:PF=CE:D'F=2:1$ となり, $\overrightarrow{OP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OE} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OF}$ と表せる。こ

こで, $\overrightarrow{OE} = \frac{4}{3}\overrightarrow{OG}, \overrightarrow{OH} = \frac{1}{3}\vec{b}$ であることに注意すると,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} &= \frac{1}{3}\overrightarrow{OE} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OF} \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{3} \left(\frac{3}{8}\vec{a} + \frac{5}{8}\vec{b} \right) + \frac{2}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AF}) \\ &= \frac{1}{6}\vec{a} + \frac{5}{18}\vec{b} + \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}k \cdot \overrightarrow{AH} \\ &= \frac{5}{6}\vec{a} + \frac{5}{18}\vec{b} + \frac{2}{3}k \cdot \left(\frac{1}{3}\vec{b} - \vec{a} \right) \\ &= \left(\frac{5}{6} - \frac{2}{3}k \right)\vec{a} + \left(\frac{5}{18} + \frac{2}{9}k \right)\vec{b} \end{aligned}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad \left(\frac{5}{6} - \frac{2}{3}k \right)\vec{a} + \left(\frac{5}{18} + \frac{2}{9}k \right)\vec{b}$$

(4)

点 P が $\triangle OAB$ の内部にあるためには, 「 $\vec{a}, \vec{b}$ の係数がどちらも 0 より大きい」かつ, 「 $\vec{a}, \vec{b}$ の係数の和が 1 未満である」ことが条件である。ゆえに,

$$\begin{aligned} &\begin{cases} \frac{5}{6} - \frac{2}{3}k > 0 \\ \frac{5}{18} + \frac{2}{9}k > 0 \\ \frac{5}{6} - \frac{2}{3}k + \frac{5}{18} + \frac{2}{9}k < 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} k < \frac{5}{4} \\ k > -\frac{5}{4} \\ k > \frac{1}{4} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{4} < k < \frac{5}{4} \end{aligned}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad \frac{1}{4} < k < \frac{5}{4}$$