

平成 30 年度

前 期 日 程

数 学 (120 分)

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
2. 問題は、1 ページから 4 ページまであります。解答用紙は、前 1，前 2，前 3，前 4 の 4 枚からなっています。ページの脱落等に気付いたときは、手をあげて監督者に知らせなさい。
3. 解答はすべて、各問題の解答用紙の解答欄に記入しなさい。
なお、解答用紙の裏にも解答を記入する場合には、表と上下を逆にして記入しなさい。
4. 監督者の指示に従って、すべての解答用紙の該当欄に志望学科名(社会工学科を志望するものは志望分野名、創造工学教育課程を志望するものは志望コース名)及び受験番号(2 か所)を左詰めで記入しなさい。
5. 解答用紙の網掛け部分及び※を付した欄には、何も記入してはいけません。
6. 試験終了後、この問題冊子は持ち帰りなさい。

1 次の問いに答えよ。

(1) $z + \frac{1}{z} = \sqrt{3}$ を満たす複素数 z の値を求めよ。また、このとき $\alpha = z^{100} + \frac{1}{z^{100}}$ の値を求めよ。

(2) $z + \frac{1}{z}$ が実数となるような複素数 z が表す複素数平面上の点全体は、どのような図形を表すか。

(3) $z + \frac{1}{z}$ が実数となる複素数 z と、 $\left| w - \left(\frac{8}{3} + 2i \right) \right| = \frac{2}{3}$ を満たす複素数 w について、 $|z - w|$ の最小値を求めよ。

2 関数 $f(x) = \sqrt{2x+1}$ に対して、数列 $\{a_n\}$ を次で定義する。

$$a_1 = 3, \quad a_{n+1} = f(a_n) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

方程式 $f(x) = x$ の解を α とおく。次の問いに答えよ。

- (1) 自然数 n に対して、 $a_n > \alpha$ が成り立つことを示せ。
- (2) 自然数 n に対して、 $a_{n+1} - \alpha < \frac{1}{2}(a_n - \alpha)$ が成り立つことを示せ。
- (3) 数列 $\{a_n\}$ が収束することを示し、その極限値を求めよ。

3 関数 $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$ に対して, $g(t) = \int_0^1 |f(x) - t| dx$ とおく。次の問いに答えよ。

(1) $f(x)$ ($0 \leq x \leq 1$) の最大値と最小値を求めよ。

(2) $g(0)$ と $g(1)$ の値を求めよ。

(3) 関数 $f(x)$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ を求めよ。

(4) $g(t)$ ($0 \leq t \leq 1$) の最小値を求めよ。

4 座標空間内の 3 点

$$O(0, 0, 0), \quad A(3, 0, 4), \quad B(1, -2, 2)$$

を通る平面を α とする。 α 上にない 2 点 C, D は次を満たす。

- (i) 点 C, D は平面 α に関して同じ側にある。
- (ii) 点 C から α に垂線 CE を下ろすと、半直線 OE は角 AOB の二等分線であり、辺 AB と点 G で交わる。点 G は OE を 3 : 1 に内分する。
- (iii) 点 D から α に垂線 DF を下ろすと、半直線 AF は辺 OB と点 H で交わる。点 H は辺 OB を 1 : 2 に内分する。
- (iv) $CE = 2 DF$

定数 k を $\overrightarrow{AF} = k \overrightarrow{AH}$ となるようにとる。 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ とおくとき、次の問いに答えよ。

- (1) $\overrightarrow{OG}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$ を用いて表し、点 G の座標を求めよ。
- (2) 平面 α に垂直なベクトルで、長さが $\sqrt{26}$ となるものを 1 つ求めよ。
- (3) 点 C から平面 α 上の点を通り点 D へ行く最短経路がある。このときに通る平面 α 上の点を P とする。 $\overrightarrow{OP}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$ および k を用いて表せ。
- (4) (3)において、点 P が $\triangle OAB$ の内部にあるための k の値の範囲を求めよ。

