

1

(1)

$$f'(x) = -\frac{k}{(1+x)^2}$$

であるから、点 P の座標を $\left(p, \frac{k}{1+p}\right)$ とおくと、点 $(-1, 1)$ から C に引いた接線の方程式は、

$$\begin{aligned} y - \frac{k}{1+p} &= -\frac{k}{(1+p)^2}(x-p) \\ \therefore y &= -\frac{k}{(1+p)^2}x + \frac{k(1+2p)}{(1+p)^2} \end{aligned}$$

である。この接線が $(-1, 1)$ を通ることより、

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{k}{(1+p)^2} + \frac{k(1+2p)}{(1+p)^2} \\ \Leftrightarrow 1 &= \frac{2k}{1+p} \\ \therefore p &= 2k-1 \end{aligned}$$

となる。よって、 $P\left(2k-1, \frac{1}{2}\right)$ である。

$$\text{(答) } P\left(2k-1, \frac{1}{2}\right)$$

(2)

ℓ の傾きは、

$$\frac{\frac{1}{2}-k}{2k-1-0} = -\frac{1}{2}$$

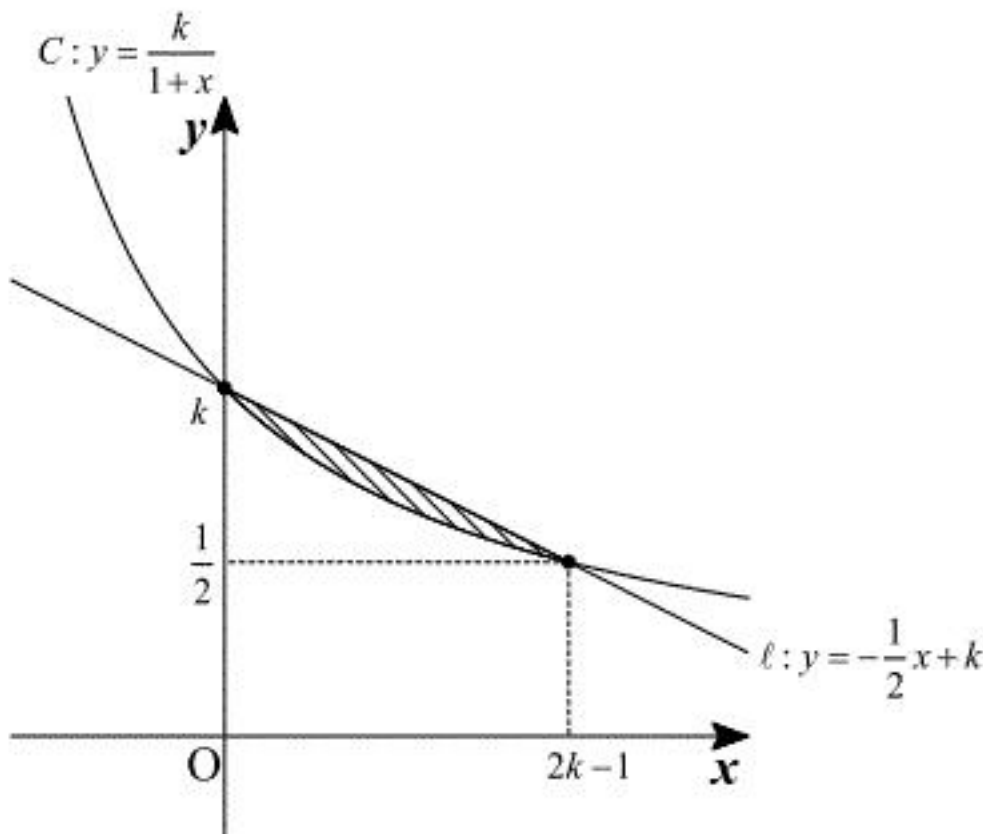
であり、 y 切片は k であるから、 ℓ の方程式は、

$$y = -\frac{1}{2}x + k$$

である。

$$\text{(答) } \ell: y = -\frac{1}{2}x + k$$

(3)



$C: y = f(x)$ も $(0, k)$ を通るので、 C と ℓ は $(0, k)$ と $\left(2k-1, \frac{1}{2}\right)$ で交わり、双曲線 C は $-1 < x$ で

下に凸だから、 C と ℓ の位置関係は上図のようになる。 D は上図の斜線部だから、

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{2k-1} \left\{ \left(-\frac{1}{2}x + k \right) - \frac{k}{1+x} \right\} dx \\ &= \left[-\frac{1}{4}(x-2k)^2 - k \log|1+x| \right]_0^{2k-1} \\ &= \left(-\frac{1}{4} - k \log 2k \right) - (-k^2) \\ &= k^2 - \frac{1}{4} - k \log 2k \end{aligned}$$

となる。

$$\text{(答) } S = k^2 - \frac{1}{4} - k \log 2k$$

(4)

C と ℓ をそれぞれ y 方向に $-\frac{1}{2}$ 平行移動させて、 x 軸周りの回転体の体積を求めればよい。 C

と ℓ をそれぞれ y 方向に $-\frac{1}{2}$ 平行移動させると方程式は、

$$\begin{aligned} C: y &= \frac{k}{1+x} - \frac{1}{2} \\ \ell: y &= -\frac{1}{2}x + k - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

となるから、

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^{2k-1} \left\{ \left(-\frac{1}{2}x + k - \frac{1}{2} \right)^2 - \left(\frac{k}{1+x} - \frac{1}{2} \right)^2 \right\} dx \\ &= \pi \int_0^{2k-1} \left\{ \left(-\frac{1}{2}x + k \right)^2 - \left(-\frac{1}{2}x + k \right) - \left(\frac{k}{1+x} \right)^2 + \frac{k}{1+x} \right\} dx \\ &= \pi \left[\frac{1}{12}(x-2k)^3 + \frac{1}{4}(x-2k)^2 + \frac{k^2}{1+x} + k \log|1+x| \right]_0^{2k-1} \\ &= \pi \left\{ \left(-\frac{1}{12} + \frac{1}{4} + \frac{k}{2} + k \log 2k \right) - \left(-\frac{2}{3}k^3 + k^2 + k^2 \right) \right\} \\ &= \pi \left(\frac{1}{6} + \frac{k}{2} - 2k^2 + \frac{2}{3}k^3 + k \log 2k \right) \\ &= \frac{\pi}{6} (1 + 3k - 12k^2 + 4k^3 + 6k \log 2k) \end{aligned}$$

である。

$$\text{(答) } V = \frac{\pi}{6} (1 + 3k - 12k^2 + 4k^3 + 6k \log 2k)$$

(1)

$f(x) = e^x - \frac{x^2}{2}$ とおく。 $x \geq 0$ において、 $f(x) > 0$ を示す。

$$f'(x) = e^x - x$$

$$f''(x) = e^x$$

であり、

$$f''(x) = e^x > 0$$

であるから、 $f'(x)$ は $x \geq 0$ の範囲で単調増加する。よって、

$$f'(x) \geq f'(0) = 1 > 0$$

である。したがって、 $f(x)$ も $x \geq 0$ の範囲で単調増加するから

$$f(x) \geq f(0) = 1 > 0$$

である。以上により、 $x \geq 0$ の範囲で $f(x) > 0$ である。よって、

$$f(x) > 0$$

$$\Leftrightarrow e^x - \frac{x^2}{2} > 0$$

$$\Leftrightarrow e^x > \frac{x^2}{2}$$

となる。

(証明終)

(2)

(1)より、 $x > 0$ において、

$$e^x > \frac{x^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow xe^{-x} < \frac{2}{x} \quad (\because x > 0)$$

$$\therefore 0 < xe^{-x} < \frac{2}{x}$$

となることがわかる。

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x} = 0$$

であるから、はさみうちの原理より、

$$\lim_{x \rightarrow \infty} xe^{-x} = 0$$

となる。

(証明終)

(3)

$-\sqrt{x} = t$ と置換すると、

$$-\frac{1}{2\sqrt{x}} dx = dt$$

$$\therefore dx = 2t dt$$

であるから、

$$\begin{aligned} \int e^{-\sqrt{x}} dx &= 2 \int te' dt \\ &= 2 \left(te' - \int e' dt \right) \\ &= 2e' (t - 1) + C \\ &= 2e^{-\sqrt{x}} (-\sqrt{x} - 1) + C \\ &= -2e^{-\sqrt{x}} (\sqrt{x} + 1) + C \end{aligned}$$

となる。ただし C は積分定数である。

(答) $\int e^{-\sqrt{x}} dx = -2e^{-\sqrt{x}} (\sqrt{x} + 1) + C$ (C は積分定数)

(4)

$$\begin{aligned} \int_0^R e^{-\sqrt{x}} dx &= \left[-2e^{-\sqrt{x}} (\sqrt{x} + 1) \right]_0^R \\ &= -2\sqrt{R}e^{-\sqrt{R}} - 2e^{-\sqrt{R}} + 2 \end{aligned}$$

である。(2)の結果も用いると、

$$\lim_{R \rightarrow \infty} -2\sqrt{R}e^{-\sqrt{R}} = 0$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} -2e^{-\sqrt{R}} = 0$$

であるから、

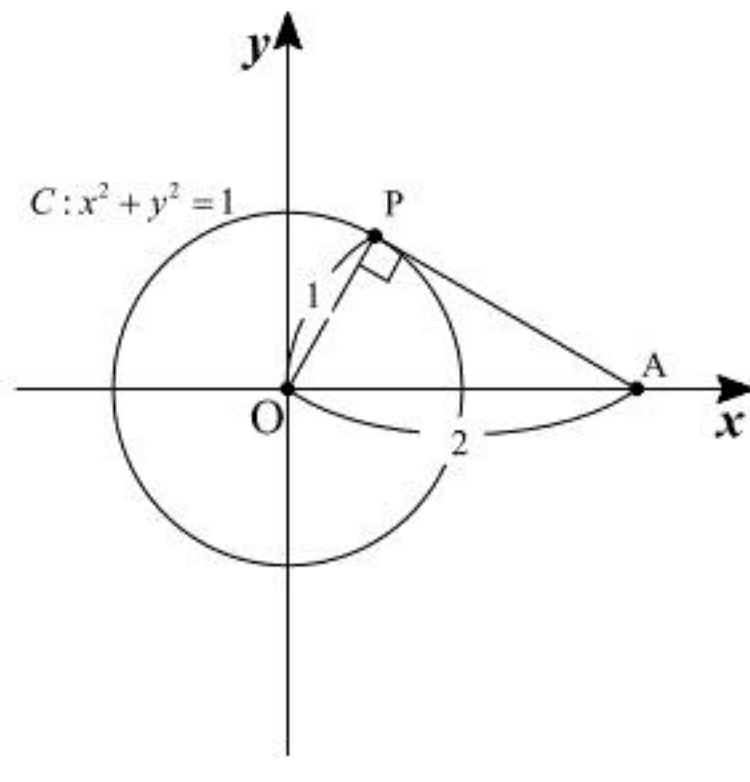
$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R e^{-\sqrt{x}} dx = 2$$

となる。

(答) $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R e^{-\sqrt{x}} dx = 2$

3

(1)

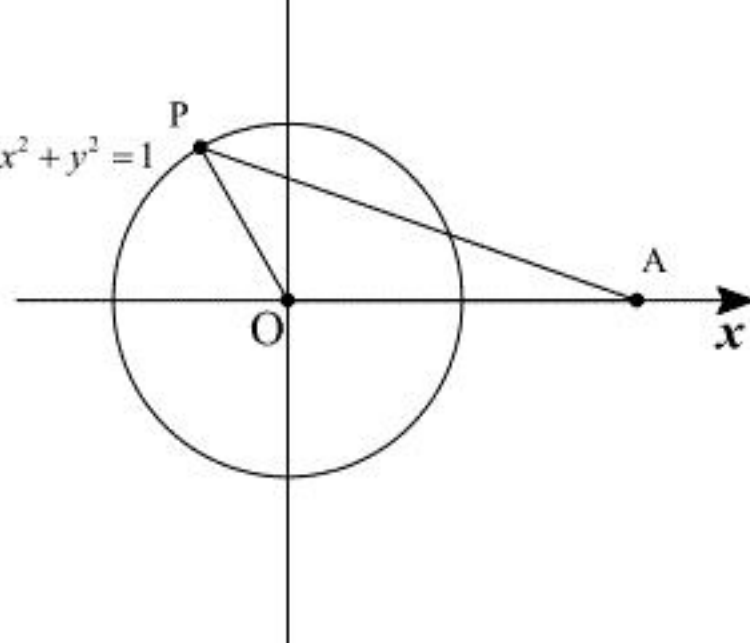


上図のようにAPがCと接するとき、

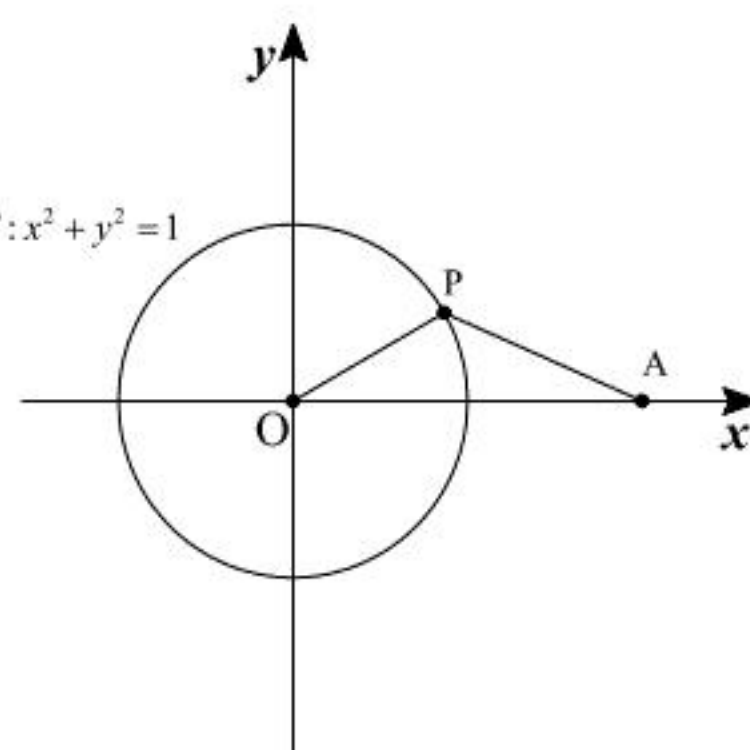
$$\cos \theta = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{3}$$

である。 $\frac{\pi}{3} < \theta \leq \pi$ のとき、



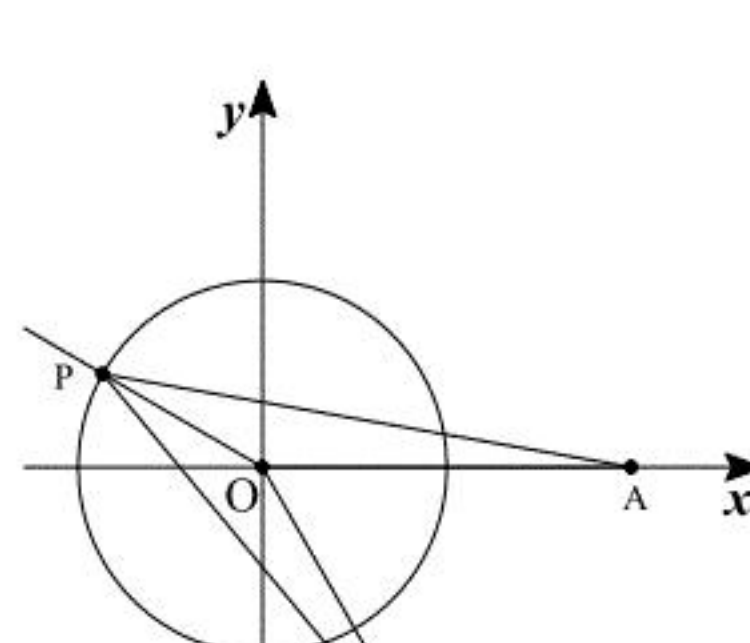
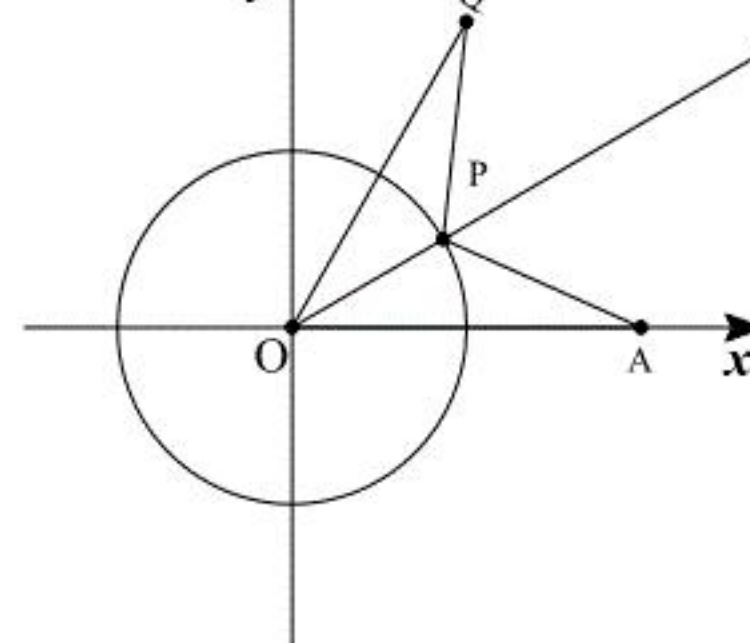
上図のように線分APとCは共有点を2つもつ。 $0 \leq \theta < \frac{\pi}{3}$ のとき、



上図のように線分APとCは共有点を1つもつ。よって、線分APとCの共有点がPだけとなるのは、 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$ のときであるから、 $a=0, b=\frac{\pi}{3}$ である。

(答) $a=0, b=\frac{\pi}{3}$

(2)



$\triangle POA \equiv \triangle POQ$ を示す。条件(i)より、

$$PA=PQ$$

である。条件(ii)より、

$$\angle APO = \angle QPO$$

である。また、POは共通である。以上より、2組の辺とその間の角がそれぞれ等しいので、

$$\triangle POA \equiv \triangle POQ$$

となる。よって、

$$\angle POA = \angle POQ$$

$$\therefore \angle QOA = 2\theta$$

であり、

$$OQ=OA=2$$

であるから、

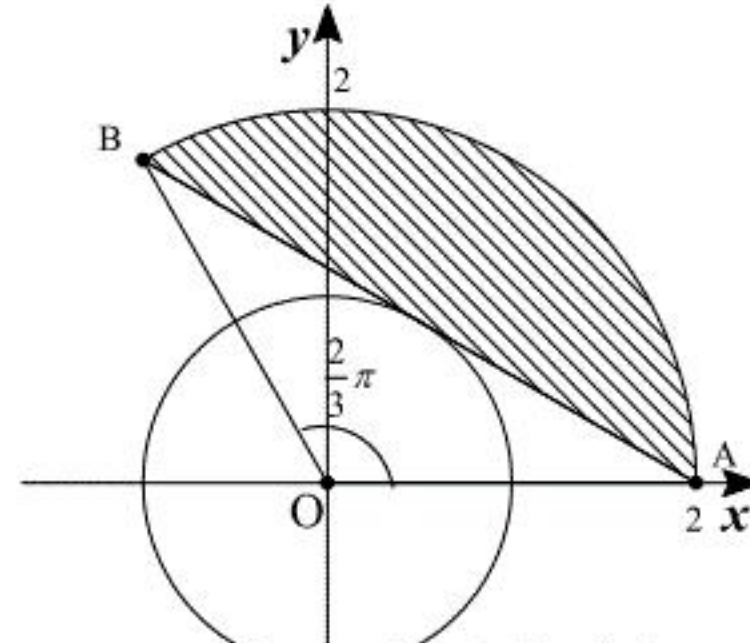
$$Q(2\cos 2\theta, 2\sin 2\theta)$$

$$\therefore \begin{cases} x(\theta) = 2\cos 2\theta \\ y(\theta) = 2\sin 2\theta \end{cases}$$

となる。

(答) $x(\theta) = 2\cos 2\theta$
 $y(\theta) = 2\sin 2\theta$

(3)



(2)より、Qは原点を中心とする半径2の円周上を動くので、 C_1 の両端を結ぶ線分と C_1 で囲まれる図形は上図の斜線部である。ただし、 C_1 の端点のうち、点Aでない方を点Bとおいた。斜線部の面積は扇形AOBの面積と $\triangle AOB$ の面積の差であるから、

$$S = \frac{1}{2} \cdot 2^2 \cdot \frac{2}{3}\pi - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{4}{3}\pi - \sqrt{3}$$

となる。

(答) $S = \frac{4}{3}\pi - \sqrt{3}$

(4)

$$\overrightarrow{OR} = \frac{4}{5}\overrightarrow{OP} + \frac{1}{5}\overrightarrow{OQ}$$

$$= \frac{4}{5} \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} + \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2\cos 2\theta \\ 2\sin 2\theta \end{pmatrix}$$

$$= \frac{2}{5} \begin{pmatrix} 2\cos \theta + \cos 2\theta \\ 2\sin \theta + \sin 2\theta \end{pmatrix}$$

である。 $R(x_r(\theta), y_r(\theta))$ とおくと、

$$L = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{(x'_r(\theta))^2 + (y'_r(\theta))^2} d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{2}{5} \sqrt{(-2\sin \theta - 2\sin 2\theta)^2 + (2\cos \theta + 2\cos 2\theta)^2} d\theta$$

$$= \frac{4}{5} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{2 + 2\sin \theta \sin 2\theta + 2\cos \theta \cos 2\theta} d\theta$$

$$= \frac{4}{5} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{2 + 2\cos \theta} d\theta$$

$$= \frac{8}{5} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{\cos^2 \frac{\theta}{2}} d\theta$$

$$= \frac{8}{5} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos \frac{\theta}{2} d\theta \quad (\because 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3} \text{ で } \cos \frac{\theta}{2} \geq 0)$$

$$= \frac{16}{5} \left[\sin \frac{\theta}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= \frac{8}{5}$$

となる。

(答) $L = \frac{8}{5}$

4

(1)

A, B, C が異なる 3 点となる条件は

$$\begin{cases} z \neq z^3 \\ z^3 \neq z^5 \\ z^5 \neq z \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} z(z-1)(z+1) \neq 0 \\ z^3(z-1)(z+1) \neq 0 \\ z(z-1)(z+1)(z-i)(z+i) \neq 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow z \neq 0, 1, -1, i, -i$$

である。

(答) $z \neq 0, \pm 1, \pm i$

(2)

異なる 3 点 A, B, C が同一直線上にあるのは,

$$\frac{z^5 - z}{z^3 - z} = z^2 + 1$$

が実数となるときである。また,

$$z^2 + 1 \text{ が実数である} \Leftrightarrow z^2 \text{ が実数である}$$

が成立する。 $r > 0, 0 \leq \theta < 2\pi$ を用いて,

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) \\ \therefore z^2 = r^2(\cos 2\theta + i \sin 2\theta)$$

と表されるとき, z^2 が実数となるのは,

$$\sin 2\theta = 0 \\ \Leftrightarrow 2\theta = 0, \pi, 2\pi, 3\pi \\ \Leftrightarrow \theta = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi$$

となるときである。すなわち, z が実数または純虚数となるときである。ただし, $z \neq 0, \pm 1, \pm i$ である。

(答) z は実数または純虚数, ただし $0, \pm 1, \pm i$ は除く

(3)

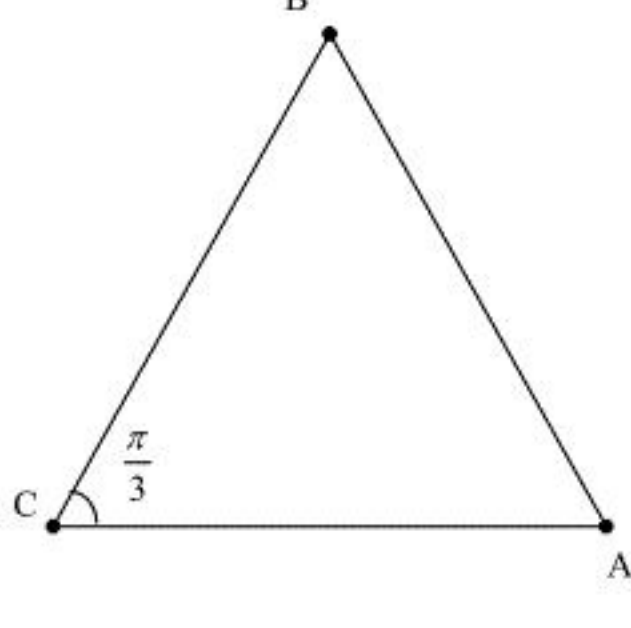
$$\alpha = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$$

とおく。これは

$$\alpha^3 = -1 \\ \Leftrightarrow \alpha^3 + 1 = 0 \\ \Leftrightarrow (\alpha + 1)(\alpha^2 - \alpha + 1) = 0 \\ \therefore \alpha^2 = \alpha - 1 \quad (\because \alpha \neq -1)$$

をみtas。

[1] A, B, C がこの順に反時計回りの位置に存在して, A, B, C が正三角形の頂点になるとき



$$z^3 - z^5 = (z - z^5)\alpha \\ \Leftrightarrow z^2 = (1 + z^2)\alpha \\ \Leftrightarrow z^2 = \frac{\alpha}{1 - \alpha} \\ \Leftrightarrow z^2 = \frac{\alpha}{-\alpha^2} \\ \Leftrightarrow z^2 = -\alpha^{-1} \\ \Leftrightarrow z^2 = -\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right\} \\ \therefore z^2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

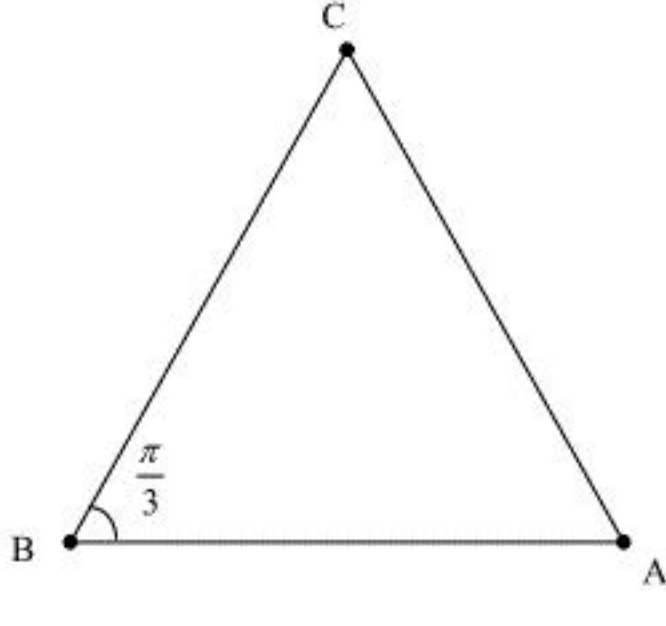
となる。ここで, $z^2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ の両辺の絶対値を取ると, $\left|-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right| = 1$ より,

$|z^2| = 1 \Leftrightarrow |z| = 1$ となる。そこで, $z = \cos \phi + i \sin \phi \quad (0 \leq \phi < 2\pi)$ とおくと,

$$z^2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ \Leftrightarrow \cos 2\phi + i \sin 2\phi = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ \Leftrightarrow 2\phi = \frac{2}{3}\pi, \frac{8}{3}\pi \quad (\because 0 \leq 2\phi < 4\pi) \\ \Leftrightarrow \phi = \frac{\pi}{3}, \frac{4}{3}\pi \\ \therefore z = \pm \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

となる。

[2] A, B, C がこの順に時計回りの位置に存在して, A, B, C が正三角形の頂点になるとき



$$z^5 - z^3 = (z - z^3)\alpha \\ \Leftrightarrow z^2 = -\alpha \\ \therefore z^2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

となる。

以上, [1], [2] より,

$$z^2 = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

であり, A, B, C がこの順に反時計回りの位置にあるとき,

$$z = \pm \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

となる。

(答) $z^2 = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i, z = \pm \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

(4)

直線 AC と直線 BC が垂直になる条件は,

$$\frac{z^5 - z}{z^5 - z^3} = \frac{z^2 + 1}{z^2}$$

が純虚数になることで,

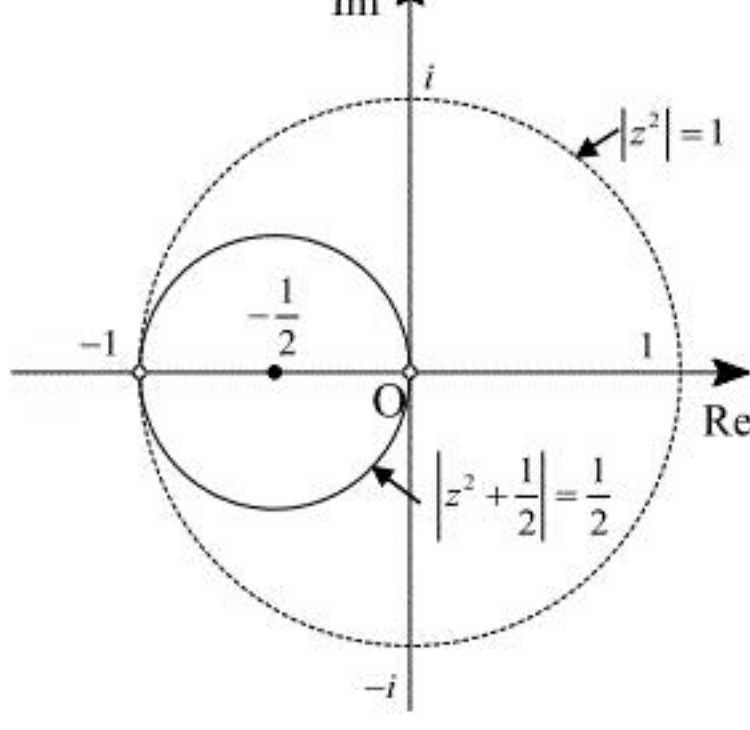
$$\frac{z^2 + 1}{z^2} + \overline{\left(\frac{z^2 + 1}{z^2}\right)} = 0 \quad (\because z \neq \pm i \text{ より } \frac{z^2 + 1}{z^2} \neq 0)$$

となる。

$$\frac{z^2 + 1}{z^2} + \overline{\left(\frac{z^2 + 1}{z^2}\right)} = 0 \\ \Leftrightarrow \frac{z^2 + 1}{z^2} + \frac{\overline{z^2} + 1}{\overline{z^2}} = 0 \\ \Leftrightarrow 2z^2\overline{z^2} + z^2 + \overline{z^2} = 0 \\ \Leftrightarrow 4z^2\overline{z^2} + 2z^2 + 2\overline{z^2} + 1 = 1 \\ \Leftrightarrow (2z^2 + 1)(2\overline{z^2} + 1) = 1 \\ \Leftrightarrow (2z^2 + 1)\overline{(2z^2 + 1)} = 1 \\ \Leftrightarrow |2z^2 + 1|^2 = 1 \\ \Leftrightarrow \left|z^2 + \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$$

であるから z^2 は複素数平面上において, $-\frac{1}{2}$ を中心とする半径 $\frac{1}{2}$ の円上を動く。ただし,

$z^2 = 0, -1$ を除く。図示すると下図のようになる。



よって, 上図より,

$$|z^2| < 1 \\ \therefore |z| < 1$$

となる。

(証明終)