

(1)

$f(x) = \sin 2x + 2$ より $f'(x) = 2 \cos 2x$ であり, $g(x) = a \sin x + b$ より $g'(x) = a \cos x$ である。曲線 $y = f(x)$ と曲線 $y = g(x)$ の $x = \pi$ における接線が一致するとき

$$\begin{cases} f(\pi) = g(\pi) \\ f'(\pi) = g'(\pi) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 = -a + b \\ 2 = -a \end{cases}$$

が成立する。これより $a = -2, b = 2$ である。

(答) $a = -2, b = 2$

(2)

(1)の結果より,

$$g(x) = -2 \sin x + 2$$

である。 $f(x)$ と $g(x)$ の大小を比較すると,

$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= \sin 2x + 2 \sin x \\ &= 2 \sin x \cos x + 2 \sin x \\ &= 2 \sin x (1 + \cos x) \\ &\geq 0 \left(\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi \right) \end{aligned}$$

である。よって, 求める体積を V とおくと,

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(\{f(x)\}^2 - \{g(x)\}^2 \right) dx \\ &= \pi \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(\sin^2 2x + 4 \sin 2x - 4 \sin^2 x + 8 \sin x \right) dx \\ &= \pi \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(\frac{1 - \cos 4x}{2} + 4 \sin 2x - 4 \cdot \frac{1 - \cos 2x}{2} + 8 \sin x \right) dx \\ &= \pi \left[-\frac{1}{8} \sin 4x - 2 \cos 2x + 2 \sin 2x - 8 \cos x - \frac{3}{2} x \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \\ &= 4\pi - \frac{4}{3} \pi^2 \end{aligned}$$

である。

(答) $4\pi - \frac{4}{3} \pi^2$

2

(1)

与えられた条件より,

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{OQ}} &= (1-t)\overline{\mathrm{OB}} + t\overline{\mathrm{OC}} \\ &= (1-t)\vec{b} + t\vec{c}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{OP}} &= (1-s)\overline{\mathrm{OA}} + s\overline{\mathrm{OQ}} \\ &= (1-s)\vec{a} + s(1-t)\vec{b} + ts\vec{c}\end{aligned}$$

と求められる。

$$(\text{答}) \quad \overline{\mathrm{OP}} = (1-s)\vec{a} + s(1-t)\vec{b} + ts\vec{c}$$

(2)

$\overline{\mathrm{OP}}$ と平面 ABC が垂直になるとき

$$\overline{\mathrm{OP}} \perp \overline{\mathrm{AB}} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\overline{\mathrm{OP}} \perp \overline{\mathrm{BC}} \quad \dots \textcircled{2}$$

である。①より,

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{OP}} \cdot \overline{\mathrm{AB}} &= 0 \\ \Leftrightarrow \{(1-s)\vec{a} + s(1-t)\vec{b} + ts\vec{c}\}(\vec{b} - \vec{a}) &= 0 \\ \Leftrightarrow (1-s)\left(\frac{1}{2} - 1^2\right) + s(1-t)\left(1^2 - \frac{1}{2}\right) + ts\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3}\right) &= 0 \left(\because |\vec{a}| = |\vec{b}| = 1, \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}, \vec{b} \cdot \vec{c} = \frac{1}{2}, \vec{c} \cdot \vec{a} = \frac{2}{3}\right) \\ \Leftrightarrow 6s - 4st - 3 &= 0 \quad \dots \textcircled{3}\end{aligned}$$

であり, ②より,

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{OP}} \cdot \overline{\mathrm{BC}} &= 0 \\ \Leftrightarrow \{(1-s)\vec{a} + s(1-t)\vec{b} + ts\vec{c}\}(\vec{c} - \vec{b}) &= 0 \\ \Leftrightarrow (1-s)\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right) + s(1-t)\left(\frac{1}{2} - 1^2\right) + ts\left(1^2 - \frac{1}{2}\right) &= 0 \left(\because |\vec{a}| = |\vec{b}| = 1, \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}, \vec{b} \cdot \vec{c} = \frac{1}{2}, \vec{c} \cdot \vec{a} = \frac{2}{3}\right) \\ \Leftrightarrow 6st - 4s + 1 &= 0 \quad \dots \textcircled{4}\end{aligned}$$

となる。③, ④より,

$$s = \frac{7}{10}, t = \frac{3}{7}$$

を得る。

$$(\text{答}) \quad s = \frac{7}{10}, t = \frac{3}{7}$$

(3)

(2)より,

$$\overline{\mathrm{OP}} = \frac{3}{10}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b} + \frac{3}{10}\vec{c}$$

である。よって,

$$\begin{aligned}|\overline{\mathrm{OP}}|^2 &= \left|\frac{3}{10}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b} + \frac{3}{10}\vec{c}\right|^2 \\ &= \frac{9}{100}|\vec{a}|^2 + \frac{4}{25}|\vec{b}|^2 + \frac{9}{100}|\vec{c}|^2 + 2 \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{5} \vec{a} \cdot \vec{b} + 2 \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{3}{10} \vec{b} \cdot \vec{c} + 2 \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{10} \vec{c} \cdot \vec{a} \\ &= \frac{9}{100} + \frac{4}{25} + \frac{9}{100} + 2 \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{3} + 2 \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{7}{10} \\ \Leftrightarrow |\overline{\mathrm{OP}}| &= \frac{\sqrt{70}}{10}\end{aligned}$$

となる。また,

$$\begin{aligned}\triangle \mathrm{ABC} &= \frac{1}{2} \sqrt{|\overline{\mathrm{AB}}|^2 |\overline{\mathrm{AC}}|^2 - (\overline{\mathrm{AB}} \cdot \overline{\mathrm{AC}})^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{b} - \vec{a}|^2 |\vec{c} - \vec{a}|^2 - \{(\vec{b} - \vec{a}) \cdot (\vec{c} - \vec{a})\}^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{(|\vec{b}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{a}|^2)(|\vec{c}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{c} + |\vec{a}|^2) - (\vec{b} \cdot \vec{c} - \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{a} \cdot \vec{c} + |\vec{a}|^2)^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\left(1 - 2 \cdot \frac{1}{2} + 1\right)\left(1 - 2 \cdot \frac{2}{3} + 1\right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + 1\right)^2} \\ &= \frac{\sqrt{5}}{6}\end{aligned}$$

となる。四面体 OABC の体積を V とおくと, $\triangle \mathrm{ABC}$ を四面体の底面と考えたとき, $\overline{\mathrm{OP}}$ が高さを表すことから,

$$\begin{aligned}V &= \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{70}}{10} \cdot \frac{\sqrt{5}}{6} \\ &= \frac{\sqrt{14}}{36}\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{\sqrt{14}}{36}$$

(1)

文字列群(A)の n 番目の文字列は n 個の文字を含んでいるので、 n 番目の文字列までの文字数の総和は $\frac{1}{2}n(n+1)$ 個である。よって、758 番目の文字が n 番目の文字列に含まれているとすると、

$$\frac{1}{2}(n-1)n < 758 \leq \frac{1}{2}n(n+1) \quad (n \geq 2)$$

が成立する。これを満たす整数 n は 39 である。ここで、38 番目の文字列の最後の文字は、

$$\frac{1}{2} \cdot 38 \cdot (1+38) = 741 \text{ 番目}$$

であるから、758 番目の文字は、39 番目の文字列の 17 番目である。このとき、

$$17 \div 3 = 5 \text{ あまり } 2$$

であるので、求める文字は E である。

(答) 39 番目の文字列の 17 番目であり、文字は E である。

(2)

文字列群(A)の文字列に M, E, D がそれぞれ何個含まれるかを考えると、

$3l$ 番目の文字列には M, E, D が l 個

$3l-1$ 番目の文字列には M, E が l 個, D が $l-1$ 個

$3l-2$ 番目の文字列には M が l 個, E, D が $l-1$ 個

含まれていることがわかる。ここで、 l は自然数である。よって、文字列群(A)の 38 番目までの文字列には M が

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^{12} (l+l+l) + 13 + 13 &= 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot (12+1) + 13 + 13 \\ &= 260 \text{ 個} \end{aligned}$$

含まれている。また、E は

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^{12} \{(l-1) + l + l\} + 12 + 13 &= \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot (2+35) + 12 + 13 \\ &= 247 \text{ 個} \end{aligned}$$

含まれている。最後に D は

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^{12} \{(l-1) + (l-1) + l\} + 12 + 12 &= \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot (1+34) + 12 + 12 \\ &= 234 \text{ 個} \end{aligned}$$

含まれている。また、39 番目の文字列について、17 個目の文字までに M が 6 個, E が 6 個, D が 5 個含まれる。以上より、758 番目までに含まれる各文字の数は

$$\text{M: } 260 + 6 = 266 \text{ 個}$$

$$\text{E: } 247 + 6 = 253 \text{ 個}$$

$$\text{D: } 234 + 5 = 239 \text{ 個}$$

である。

(答) M: 266 個, E: 253 個, D: 239 個

(1)

5年後の人口は,

$$1.0 \times 10^8 \times (0.98)^5 \text{ 人}$$

である。ここで

$$\begin{aligned} \log_{10} \left(1.0 \times 10^8 \times (0.98)^5 \right) &= \log_{10} 10^{-2} + \log_{10} 98^5 \\ &= -2 + 5(\log_{10} 2 + 2\log_{10} 7) \\ &= 7.956 \end{aligned}$$

であり, また

$$\begin{aligned} \log_{10} (6.0 \times 10^7) &= \log_{10} 10^7 + \log_{10} 6 \\ &= 7 + (\log_{10} 2 + \log_{10} 3) \\ &= 7.7781 \end{aligned}$$

であるから, (底) $=10 > 1$ と $7.956 > 7.7781$ より, 5年後の人口は 6000 万人より多い。したがって, 人口が 6000 万人以下になるのは 6 年後以降である。 $x \geq 6$ について, x 年後にはじめて人口が 6000 万人以下になるとすると,

$$1.0 \times 10^8 \times (0.98)^5 \cdot (0.99)^{x-5} < 6.0 \times 10^7$$

が成立する。両辺の常用対数をとって整理すると,

$$\begin{aligned} 8 + 5(\log_{10} 98 - 2) + (x-5)(\log_{10} 99 - 2) &< 7 + \log_{10} 6 \\ \Leftrightarrow 8 - 2x + 5\log_{10} 98 + (x-5)\log_{10} 99 &< 7 + \log_{10} 6 \\ \Leftrightarrow 8 - 2x + 5(\log_{10} 2 + 2\log_{10} 7) + (x-5)(2\log_{10} 3 + \log_{10} 11) &< 7 + \log_{10} 6 \\ \Leftrightarrow 8 - 2x + 5\{0.3010 + 2 \cdot (0.8451)\} + (x-5)\{2 \cdot (0.3010) + 1.0414\} &< 7 + 0.7781 \\ \Leftrightarrow 8 - 2x + 5 \cdot (1.9912) + (x-5) \cdot (1.9956) &< 7.7781 \\ \Leftrightarrow x &> 45.4 \end{aligned}$$

となる。以上より, 人口が初めて 6000 万人以下になるのは 46 年後である。

(答) 46 年後

(2)(a)

$$\begin{aligned} \log_{10} 99^{100} &= 100(2\log_{10} 3 + \log_{10} 11) \\ &= 199.56 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log_{10} 100^{99} &= 99 \cdot 2 \\ &= 198 \end{aligned}$$

であるから,

$$\log_{10} 99^{100} > \log_{10} 100^{99}$$

となり, (底) $=10 > 1$ より,

$$99^{100} > 100^{99}$$

となる。

(答) $99^{100} > 100^{99}$

(b)

まず, $f(x) = \frac{\log x}{x} (x > 0)$ とおく。ただし, 底は自然対数 e である。このとき,

$$f'(x) = \frac{1 - \log x}{x^2}$$

より, $f(x)$ の増減表は以下ようになる。

x	0		e	
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$				

増減表より, $x > e$ のとき $f(x)$ は単調減少する。よって, $e < 999 < 1000$ であることより

$$f(999) > f(1000) \Leftrightarrow \frac{\log 999}{999} > \frac{\log 1000}{1000}$$

となる。よって,

$$\begin{aligned} 1000 \log 999 &> 999 \log 1000 \\ \Leftrightarrow \log 999^{1000} &> \log 1000^{999} \end{aligned}$$

が成立する。(底) $=e > 1$ より

$$999^{1000} > 1000^{999}$$

である。

(答) $999^{1000} > 1000^{999}$