

1.

(1)

数式 $f(x)$ を $2x^2+x-1$ で割ったときの商を $p(x)$

x^2-2x+1 で割ったときの商を $q(x)$ とおくと,

$$\begin{aligned}f(x) &= (2x^2+x-1)p(x)+2x+1 \\ &= (x+1)(2x-1)p(x)+2x+1 \quad \dots \textcircled{1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f(x) &= (x^2-2x+1)q(x)+4x-5 \\ &= (x-1)^2 q(x)+4x-5 \quad \dots \textcircled{2}\end{aligned}$$

と表せる。①より,

$$f(-1)=-1 \quad \dots \textcircled{3}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=2 \quad \dots \textcircled{4}$$

②より,

$$f(1)=-1 \quad \dots \textcircled{5}$$

となる。また, $f(x)$ を $2x^3-x^2-2x+1$ で割ったときの余りは,

$$ax^2+bx+c \quad (a, b, c \text{ は実数})$$

とおける。商を $r(x)$ とすると,

$$\begin{aligned}f(x) &= (2x^3-x^2-2x+1)r(x)+ax^2+bx+c \\ &= (x+1)(x-1)(2x-1)r(x)+ax^2+bx+c\end{aligned}$$

と表せるので, ③より,

$$a-b+c=-1$$

④より,

$$\frac{1}{4}a+\frac{1}{2}b+c=2$$

⑤より,

$$a+b+c=-1$$

となり, これより,

$$(a, b, c)=(-4, 0, 3)$$

と求まる。

(答) $(a, b, c)=(-4, 0, 3)$

(2)

$$\log_{\frac{1}{2}} x + \log_{\frac{1}{2}} y = \log_{\frac{1}{2}} xy$$

であるから, xy が最大となるとき, $\log_{\frac{1}{2}} x + \log_{\frac{1}{2}} y$ は最少となる。ここで, $x, y > 0$ であるこ

とから, 相加平均と相乗平均に関する不等式より

$$8 = x + y \geq 2\sqrt{xy}$$

であるため, 両辺 2 乗することによって

$$xy \leq 16$$

を得る。等号成立は, $x=y$ なので, $x=y=4$ のとき xy は最大値 16 をとる。このとき,

$$\log_{\frac{1}{2}} xy = \log_{\frac{1}{2}} 16 = -4$$

となるので, $\log_{\frac{1}{2}} x + \log_{\frac{1}{2}} y$ の最小値は -4 である。

(答)最小値 -4 , そのとき $x=y=4$

2.

(1)

$$\overrightarrow{OC} = \frac{3}{5}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b}$$

である。また、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PA} &= \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OP} \\ &= \vec{a} - \frac{5}{19}\overrightarrow{OC} \\ &= \frac{16}{19}\vec{a} - \frac{2}{19}\vec{b}\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{OC} = \frac{3}{5}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b}, \quad \overrightarrow{PA} = \frac{16}{19}\vec{a} - \frac{2}{19}\vec{b}$$

(2)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ} &= \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} \\ &= \frac{10}{19}\overrightarrow{OC} \\ &= \frac{6}{19}\vec{a} + \frac{4}{9}\vec{b}\end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PQ} &= \left(\frac{16}{19}\vec{a} - \frac{2}{19}\vec{b} \right) \cdot \left(\frac{6}{19}\vec{a} + \frac{4}{19}\vec{b} \right) \\ &= \left(\frac{1}{19} \right)^2 \cdot \left(16 \cdot 6 - 2 \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 4 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 6 \right) \quad \left(\because |\vec{a}| = |\vec{b}| = 1, \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{6}{19}\end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PQ} = \frac{6}{19}$$

(3)

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{PA}| &= \left(\frac{16}{19} \right)^2 \cdot 1^2 - 2 \cdot \frac{16}{19} \cdot \frac{2}{19} \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{2}{19} \right)^2 \cdot 1^2 \\ &= \frac{12}{19}\end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{QA}|^2 &= |\overrightarrow{PA} - \overrightarrow{PQ}|^2 \\ &= |\overrightarrow{PA}|^2 - 2\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PQ} + |\overrightarrow{PQ}|^2 \\ &= \frac{12}{19} - 2 \cdot \frac{6}{19} + |\overrightarrow{PQ}|^2 \\ &= |\overrightarrow{PQ}|^2\end{aligned}$$

となる。 $|\overrightarrow{PQ}|, |\overrightarrow{QA}| > 0$ であるから、

$$|\overrightarrow{PQ}| = |\overrightarrow{QA}|$$

である。

(証明終)

3.

(1)

辺の数は6本であり、そのうち3本が赤である確率は、

$${}_6C_3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{160}{729}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \frac{160}{729}$$

(2)

1つの頂点から出る赤い辺の本数は、0, 1, 2, 3本のいずれかである。

[1]1本である確率は、

$${}_3C_1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$$

となる。

[2]2本である確率は、

$${}_3C_2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{9}$$

となる。

[3]3本である確率は、

$${}_3C_3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$$

となる。

以上より、求める期待値は、

$$\frac{4}{9} \cdot 1 + \frac{2}{9} \cdot 2 + \frac{1}{27} \cdot 3 = 1$$

と求まる。

$$(\text{答}) 1$$

(3)

ある一つの面について考える。その面が赤い辺で囲まれる確率は、

$$\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$$

である。また、他の面が赤い辺で囲まれないためにはほかの辺がすべて白、もしくは1本のみが赤となる。このときの確率は、

$$\left(\frac{2}{3}\right)^3 + {}_3C_1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{20}{27}$$

と求まる。また、同じことが他の3面についてもいえるので求める確率は、

$$\frac{1}{27} \cdot \frac{20}{27} \cdot 4 = \frac{80}{729}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \frac{80}{729}$$

4.

(1)

$x=2$ のとき,

$$AB=3, BC=\sqrt{7}, CA=k\sqrt{2}$$

である。 $AB>BC$ なので, $\triangle ABC$ が存在する条件は,

$$AB-BC<CA<AB+BC$$

である。したがって,

$$3-\sqrt{7}<k\sqrt{2}<3+\sqrt{7}$$

となるので, ゆえに,

$$\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{14}}{2}<k<\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{14}}{2}$$

となる。

$$(答) \frac{3\sqrt{2}-\sqrt{14}}{2}<k<\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{14}}{2}$$

(2)

$t>0$ のとき, $\sqrt{t}, \frac{1}{\sqrt{t}}>0$ なので, 相加相乗平均の関係より

$$\sqrt{t}+\frac{1}{\sqrt{t}}\geq 2\sqrt{\sqrt{t}\cdot\frac{1}{\sqrt{t}}}=2 \quad (\text{等号成立は}\sqrt{t}=\frac{1}{\sqrt{t}}\text{より}t=1\text{のとき})$$

となる。また,

$$\sqrt{t+\frac{1}{t}+1}\geq\sqrt{2\cdot t\cdot\frac{1}{t}+1}=\sqrt{3} \quad (\text{等号成立は}t=\frac{1}{t}\text{より}t=1\text{のとき})$$

となる。ゆえに,

$$\sqrt{t}+\frac{1}{\sqrt{t}}+\sqrt{t+\frac{1}{t}+1}\geq 2+\sqrt{3} \quad (\text{等号成立は}t=1\text{のとき})$$

である。またここで,

$$\left(\sqrt{t}+\frac{1}{\sqrt{t}}\right)^2-\left(\sqrt{t+\frac{1}{t}+1}\right)^2=1$$

より,

$$\left(\sqrt{t}+\frac{1}{\sqrt{t}}+\sqrt{t+\frac{1}{t}+1}\right)\left(\sqrt{t}+\frac{1}{\sqrt{t}}-\sqrt{t+\frac{1}{t}+1}\right)=1$$

である。ここで,

$$\sqrt{t}+\frac{1}{\sqrt{t}}+\sqrt{t+\frac{1}{t}+1}\geq 2+\sqrt{3}$$

であるから,

$$\sqrt{t}+\frac{1}{\sqrt{t}}-\sqrt{t+\frac{1}{t}+1}\leq\frac{1}{2+\sqrt{3}}=2-\sqrt{3} \quad (\text{等号成立は}t=1\text{のとき})$$

となる。

(証明終)

(3)

$AB=x+1=\sqrt{x^2+2x+1}>\sqrt{x^2+x+1}=BC$ なので, $\triangle ABC$ が存在する条件は,

$$AB-BC<CA<AB+BC$$

すなわち,

$$x+1-\sqrt{x^2+x+1}<k\sqrt{x}<x+1+\sqrt{x^2+x+1}$$

である。ここで, $\sqrt{x}>0$ なので, 全辺を $\sqrt{x}$ で割ると,

$$\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}-\sqrt{x+\frac{1}{x}+1}<k<\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt{x+\frac{1}{x}+1}$$

となる。任意の正数 x に対して

$$\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt{x+\frac{1}{x}+1}\geq 2+\sqrt{3}$$

$$\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}-\sqrt{x+\frac{1}{x}+1}\leq 2-\sqrt{3}$$

なので(等号成立は $x=1$), 任意の x に対して, 三角形が存在する条件は,

$$2-\sqrt{3}<k<2+\sqrt{3}$$

となる。

$$(答) 2-\sqrt{3}<k<2+\sqrt{3}$$