

平成 20 年度・入学試験問題(前期)

数 学 (K)

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
2. 解答用紙にはすべて受験番号を記入しなさい。
3. 答案は解答用紙各問題番号の欄に記入しなさい。
4. 試験終了後、問題冊子および草稿紙は持ち帰りなさい。

1. 次の問いに答えよ。

- (1) 整式 $f(x)$ を $2x^2 + x - 1$ で割ると $2x + 1$ 余り、 $x^2 - 2x + 1$ で割ると $4x - 5$ 余る。 $f(x)$ を $2x^3 - x^2 - 2x + 1$ で割った余りを求めよ。
- (2) $x + y = 8$, $x > 0$, $y > 0$ のとき、 $\log_{\frac{1}{2}} x + \log_{\frac{1}{2}} y$ の最小値とそのときの x と y の値を求めよ。

2. 一辺の長さが 1 の正三角形 OAB がある。辺 AB を 2 : 3 に内分する点を C, 線分 OC を 5 : 14 に内分する点を P, 線分 OC を 15 : 4 に内分する点を Q とする。

$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ とするとき、次の問いに答えよ。

- (1) $\overrightarrow{OC}$ および $\overrightarrow{PA}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$ で表せ。
- (2) 内積 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PQ}$ を求めよ。
- (3) 線分 PQ と線分 QA の長さが等しくなることを示せ。

3. 同じ長さの赤と白の棒を6本使って正四面体をつくる。ただし、各辺が赤である確率は $\frac{1}{3}$ 、白である確率は $\frac{2}{3}$ とする。次の問いに答えよ。

- (1) 赤い辺の本数が3である確率を求めよ。
- (2) 1つの頂点から出る赤い辺の本数の期待値を求めよ。
- (3) 赤い辺で囲まれる面が1つである確率を求めよ。

4. 正の数 x に対して、三辺の長さが $AB = x + 1$, $BC = \sqrt{x^2 + x + 1}$, $CA = k\sqrt{x}$ で与えられる三角形ABCを考える。次の問いに答えよ。

- (1) $x = 2$ のとき、三角形ABCが存在するような k の値の範囲を求めよ。
- (2) 任意の正の数 t に対して不等式

$$\sqrt{t} + \frac{1}{\sqrt{t}} + \sqrt{t + \frac{1}{t}} + 1 \geq 2 + \sqrt{3} \quad \text{①}$$

および

$$\sqrt{t} + \frac{1}{\sqrt{t}} - \sqrt{t + \frac{1}{t}} + 1 \leq 2 - \sqrt{3} \quad \text{②}$$

が成立することを示せ。ただし、②を証明する際に①を利用してよい。

- (3) ②の結果を利用して、任意の正の数 x に対して三角形ABCが存在するような k の値の範囲を求めよ。