1.

$$\left(\log_2 x\right)^3-6\log_{\sqrt{2}}x+k=0$$

$$\left(\log_2 x\right)^3-6\frac{\log_2 x}{\log_2\sqrt{2}}+k=0$$

$$\left(\log_2 x\right)^3-12\log_2 x+k=0$$

$t=\log_2 x$ とおき，$f(t)=t^3-12t+k=0$ が異なる 2 つの解を持つ条件を調べる。

$f'(t)=3t^2-12=0$ を解くと，$t=2,-2$ である。

よって，$f(t)$ の増減表は次のようになる。

t		-2		2	
$f'(t)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(t)$	↗	$16+k$	↘	$-16+k$	↗

よって $f(t)=0$ が異なる 2 解をもつのは，$f(2)=0$ または $f(-2)=0$ のときである。

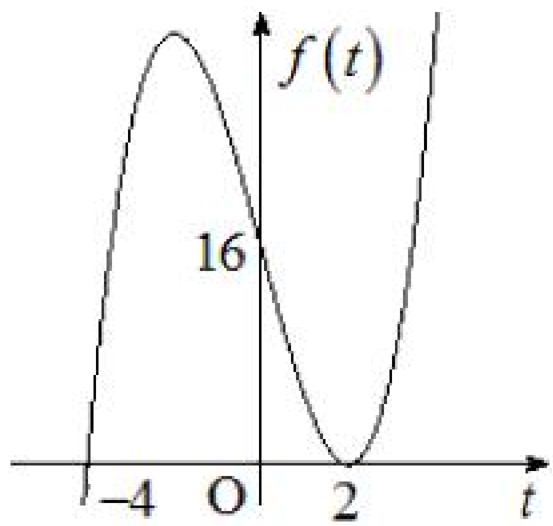
$f(2)=0$，すなわち $k=16$ のとき

$$t^3-12t+16=0\Leftrightarrow(t+4)(t-2)^2=0$$
$$\Leftrightarrow t=2,-4$$

$t=\log_2 x$ なので，求める解は

$$2=\log_2 x\Leftrightarrow x=4$$

$$-4=\log_2 x\Leftrightarrow x=\frac{1}{16}$$



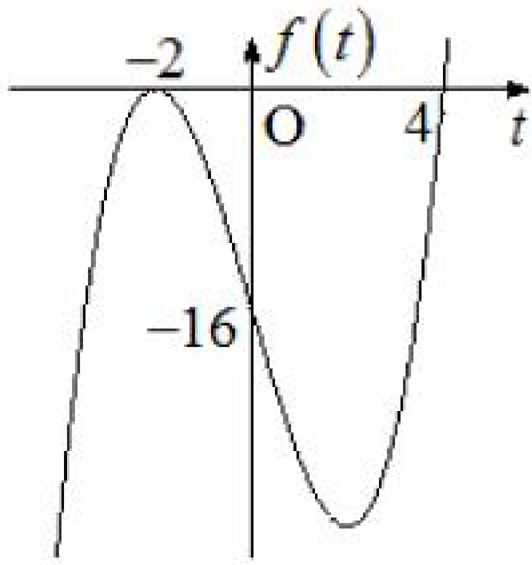
$f(-2)=0$，すなわち $k=-16$ のとき

$$t^3-12t-16=0\Leftrightarrow(t-4)(t+2)^2=0$$
$$\Leftrightarrow t=4,-2$$

$t=\log_2 x$ なので，求める解は

$$4=\log_2 x\Leftrightarrow x=16$$

$$-2=\log_2 x\Leftrightarrow x=\frac{1}{4}$$



（答）$k=16$ のとき　$x=4,\frac{1}{16}$，　$k=-16$ のとき　$x=16,\frac{1}{4}$

2.

(1)

$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\left|2\vec{a}+\vec{b}\right|=\sqrt{7}$ より，

$$\left|\vec{a}\right|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\left|\vec{b}\right|^2=4\left|\vec{a}\right|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+\left|\vec{b}\right|^2=7$$

$\left|\vec{a}\right|^2=1$ を代入して解くと，

$$\left|\vec{b}\right|=3,\ \vec{a}\cdot\vec{b}=-\frac{3}{2}$$

よって，

$$\left|\overrightarrow{AB}\right|^2=\left|\vec{b}-\vec{a}\right|^2=\left|\vec{b}\right|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+\left|\vec{a}\right|^2=13 \qquad \therefore\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{13}$$

（答） $\sqrt{13}$

(2)

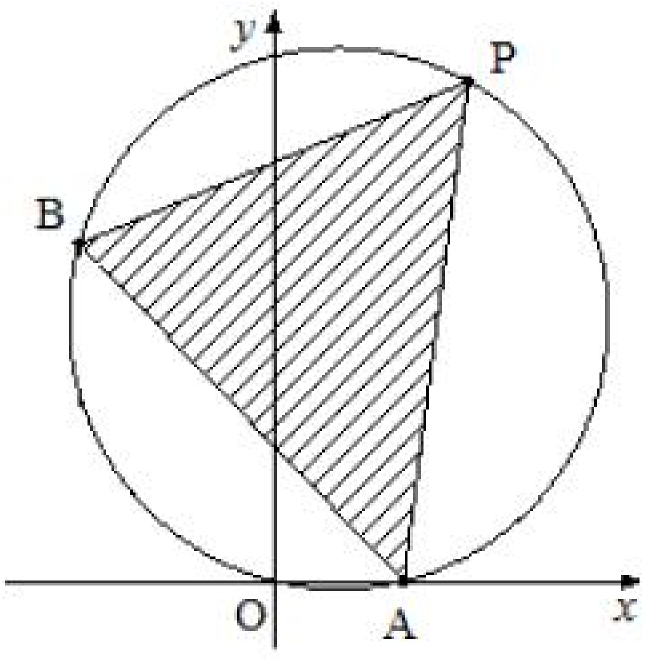
$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\angle AOB=-\frac{3}{2}$ より，

$$\cos\angle AOB=-\frac{1}{2} \qquad \therefore\angle AOB=\frac{2}{3}\pi$$

以下の議論で，$A(1,0)$，$B\left(-\frac{3}{2},\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ と座標を設定しても一般性を失わない。

次図のように，P が AB に関して O と反対側にあるとき△PAB の面積が

最大となる可能性があり，このとき $\angle APB=\pi-\angle AOB=\frac{\pi}{3}$ で一定である。



明らかに，△PAB が最大になるのは△PAB が正三角形になるときである。

一辺の長さは $\sqrt{13}$ なので求める面積は

$$\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\sqrt{13}\right)^2=\frac{13\sqrt{3}}{4}$$

（答） $\frac{13\sqrt{3}}{4}$

(3)

点 Q が動く円は $x^2+y^2=1$ であり，

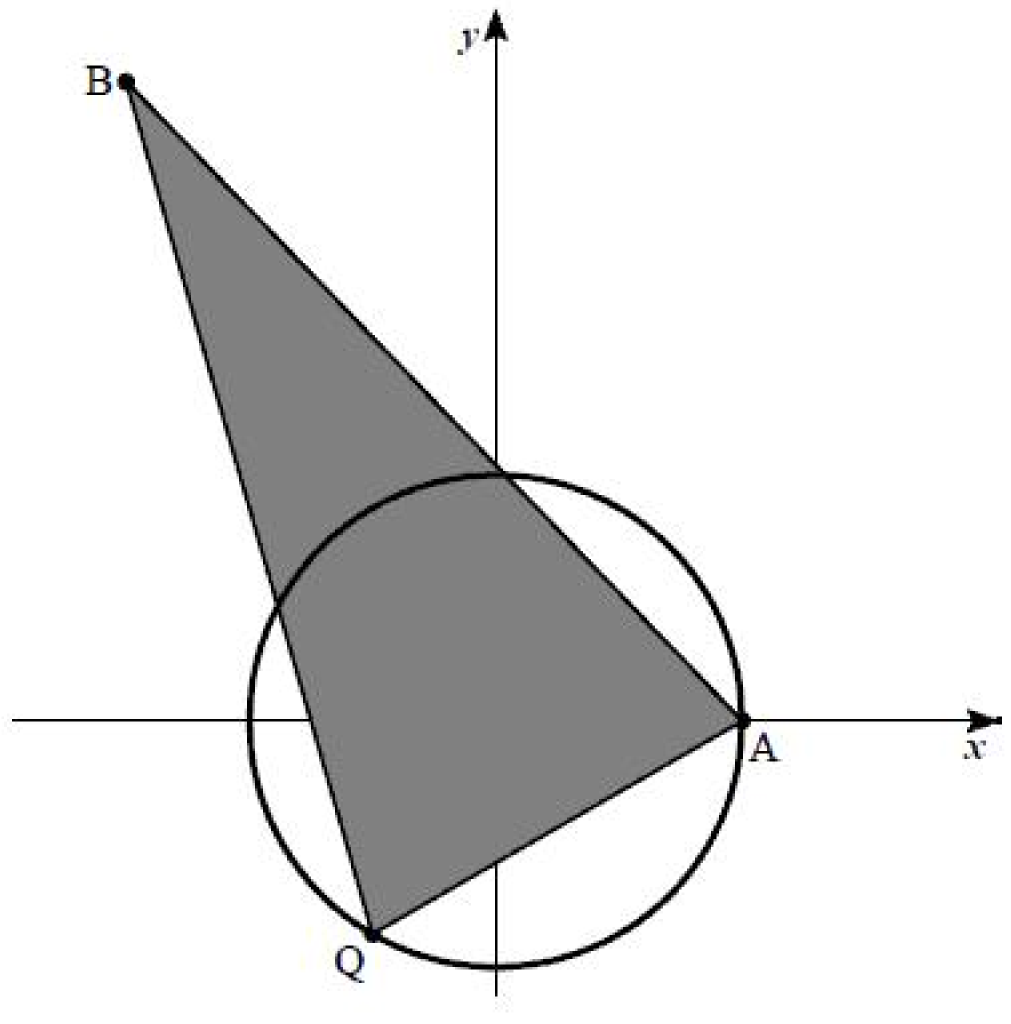
直線 AB の式は $y=\dfrac{\frac{3\sqrt{3}}{2}}{-\frac{3}{2}-1}(x-1)\Leftrightarrow 3\sqrt{3}x+5y-3\sqrt{3}=0$ である。

よって，直線 AB と原点の距離は $\dfrac{\left|-3\sqrt{3}\right|}{\sqrt{\left(3\sqrt{3}\right)^2+5^2}}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{13}}$

これより，点 Q と直線 AB との最大の距離は $1+\dfrac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{13}}$ となり，

このとき△QAB の面積は最大値 $\dfrac{1}{2}\sqrt{13}\left(1+\dfrac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{13}}\right)=\dfrac{\sqrt{13}}{2}+\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$ をとる。

（答） $\frac{\sqrt{13}}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{4}$



3.

(1)

直線ABの式は$(1-a)x+ay-a(1-a)=0$ $(\because a+b=1)$である。

これに$x=p$を代入すると，

$$ay=(1-a)(a-p)$$

$a=0$のとき，直線ABと直線$x=p$は交点を持たない。

$a>0$のとき，直線ABと直線$x=p$の交点のy座標は

$$y=\frac{(1-a)(a-p)}{a}=p+1-\left(a+\frac{p}{a}\right)$$

相加相乗平均の関係を用いて

$$y\leqq p+1-2\sqrt{a\cdot\frac{p}{a}}=p-2\sqrt{p}+1 \qquad （等号成立は a=\frac{p}{a}\Leftrightarrow a=\sqrt{p} のとき）$$

よって，求める最大値は $p-2\sqrt{p}+1=\left(1-\sqrt{p}\right)^2$

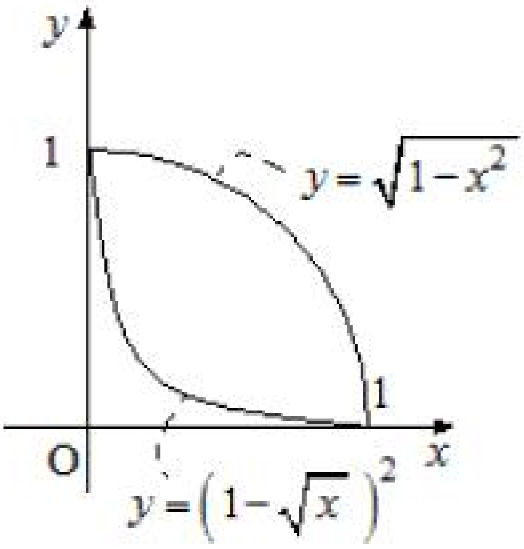
（答）$\left(1-\sqrt{p}\right)^2$

(2)

直線ABと直線$x=p$の交点のy座標の最小値は0（$a=1$のとき）なので，

(1)の答を用いるとV_1の体積は

$$\int_0^1\pi\left(1-\sqrt{x}\right)^4dx$$
$$=\int_0^1\pi\left(1-4\sqrt{x}+6x-4x\sqrt{x}+x^2\right)dx$$
$$=\pi\left[x-\frac{8}{3}x^{\frac{3}{2}}+3x^2-\frac{8}{5}x^{\frac{5}{2}}+\frac{1}{3}x^3\right]_0^1$$
$$=\frac{\pi}{15}$$



立体V_1の底面（yz平面上）は半径1の円である。

この円をy軸の周りに回転させてできる立体は半径1の球なので，

立体V_2は半径1の球よりも大きい。（または等しい）

次に，領域$0\leqq y\leqq\sqrt{1-x^2}$ $(0\leqq x\leqq 1)$をx軸の周りに回転させてできた立体を，

さらにy軸の周りに回転させてできる立体を考えると，これも半径1の球である。

図より，このようにしてできた立体は明らかに立体V_2よりも大きい。（または等しい）

以上より，立体V_2は半径1の球であり，その体積は$\frac{4}{3}\pi$である。

よって，2つの立体の体積比は

$$V_1:V_2=\frac{\pi}{15}:\frac{4}{3}\pi=1:20$$

（答）$V_1:V_2=1:20$

4.

(1)

1 をかけても大きくならないので，$M(n)$ を与える自然数の組み合わせの中に

1 は含まれない。このとき $M(8)$ を与えうる自然数の組は

$$(2,2,2,2),(3,3,2),(4,2,2),(4,4),(5,3),(6,2)$$

であり，このうちそれぞれの自然数の積が最大となるのは

$(3,3,2)$ のときで，その値は $M(8)=3\times3\times2=18$

（答） 18

(2)

$M(12)$ を与えうる自然数の組は

$$(2,2,2,2,2,2),(4,2,2,2,2),(3,3,2,2,2),(6,2,2,2),(5,3,2,2),(4,4,2,2),(4,3,3,2)$$

$$(3,3,3,3),(8,2,2),(7,3,2),(6,4,2),(6,3,3),(5,5,2),(5,4,3),(4,4,4)$$

$$(10,2),(9,3),(8,4),(7,5),(6,6)$$

であり，このうち積が最大となるのは $(3,3,3,3)$ のときで，その値は $M(12)=3^4=81$

（答） 81

(3)

2 以上の自然数 a,b に対し

$$ab-(a+b)=(a-1)(b-1)-1\geqq0 \quad （等号成立は a=b=2 のとき）$$

が成り立つので，5 以上の自然数は 2 以上の自然数の和に書き換えた方が

積が大きくなることが分かる。（4 は 2+2 に書き換えても変わらない）

次に，5 以上の自然数 k を 3 の和に最大限分けた場合と，2 の和に最大限分けた場合の

どちらが積が大きくなるかを考える。

$$3(k-3)-2(k-2)=k-5\geqq0$$

が成り立つので，5 以上の自然数は 3 の和に最大限分けた場合に，積が大きくなる。

以上をまとめると，t を 2 以上の自然数としたとき，積が最大になる組み合わせは

$n=3t$ のとき　$(3,3,\cdots,3)$

$n=3t-1$ のとき　$(3,3,\cdots,3,2)$

$n=3t-2$ のとき　$(3,3,\cdots,3,2,2)$ または $(3,3,\cdots,3,4)$

（答） $n=3t$ のとき $M(n)=3^{\frac{n}{3}}$

$n=3t-1$ のとき $M(n)=2\times3^{\frac{n-2}{3}}$

$n=3t-2$ のとき $M(n)=4\times3^{\frac{n-4}{3}}$