

1.

(1)

$2x+4, |x-2|$ の大小を論じる。

(i) $x-2>0$, 即ち $2<x$ のとき

$$(2x+4)-|x-2|=(2x+4)-(x-2)=x+6>0$$

よって, $2<x$ のときは常に $2x+4>|x-2|$ が成り立つ。ゆえに,

$$f(x)=\min(2x+4, |x-2|)=|x-2|=x-2$$

(ii) $x-2\leq 0$, 即ち $x\leq 2$ のとき

$$(2x+4)-|x-2|=(2x+4)-(-x+2)=3x+2$$

よって,

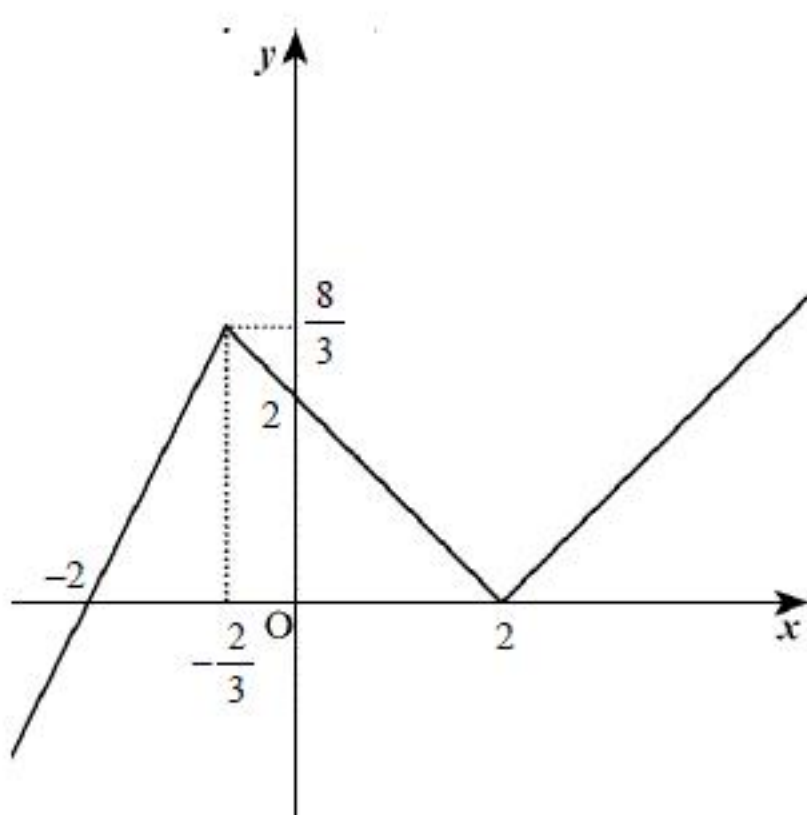
$$-\frac{2}{3}<x\leq 2 \text{ のときは } 2x+4>|x-2| \text{ より, } f(x)=|x-2|=-x+2$$

$$x\leq -\frac{2}{3} \text{ のときは } 2x+4\leq |x-2| \text{ より, } f(x)=2x+4$$

以上 (i), (ii) より,

$$f(x)=\begin{cases} 2x+4 & \left(x\leq -\frac{2}{3}\right) \\ -x+2 & \left(-\frac{2}{3}<x\leq 2\right) \\ x-2 & (2<x) \end{cases}$$

よって, $y=f(x)$ のグラフは次のようになる。

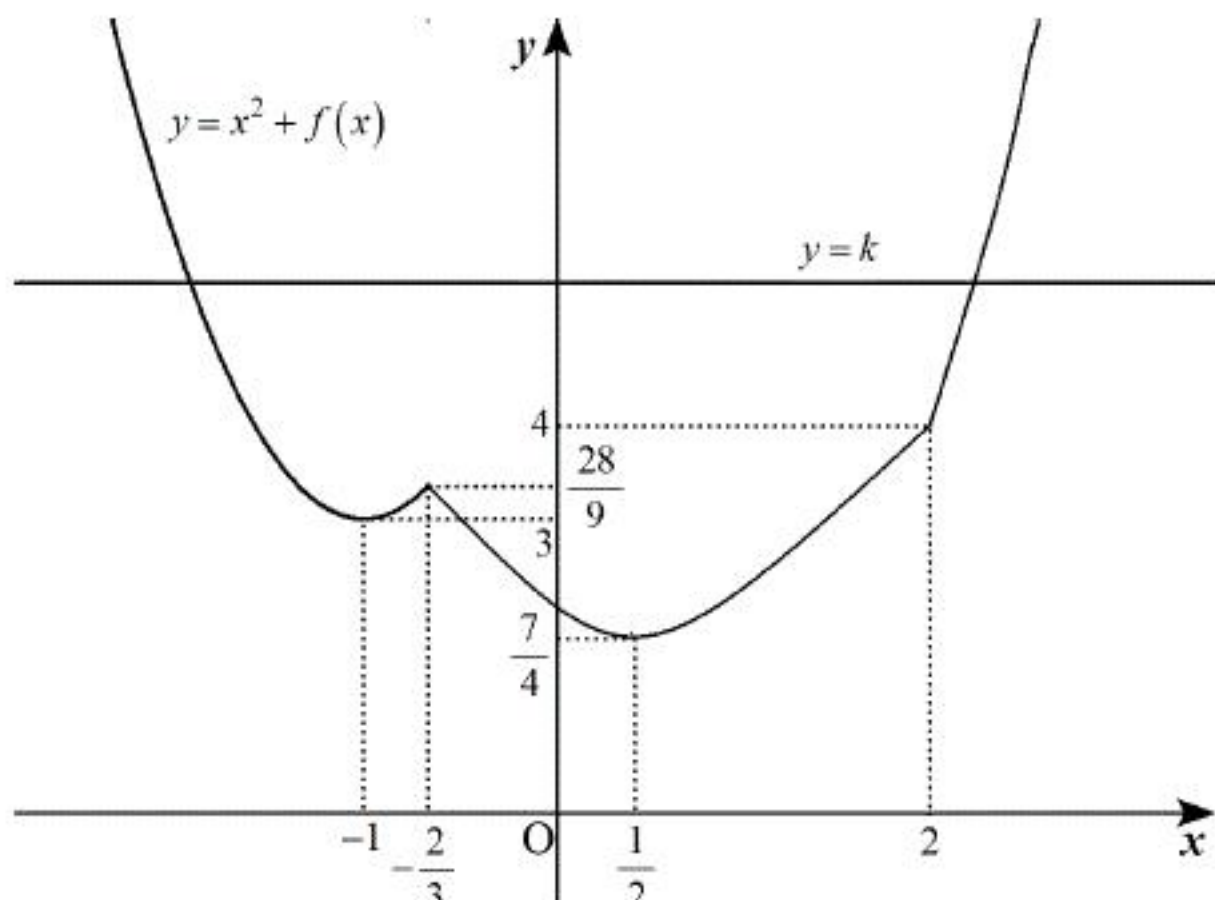


(答) 前図

(2)

$f(x)=g(x) \Leftrightarrow x^2+f(x)=k$ なので, $y=f(x)$ と $y=g(x)$ のグラフの交点の個数は $y=x^2+f(x)$ と $y=k$ のグラフの交点の個数に等しい。

それぞれのグラフは次図のようになる。



上のグラフより, 求める交点の個数は次のようになる。

$$k < \frac{7}{4} \text{ のとき } \quad 0 \text{ 個}$$

$$k = \frac{7}{4} \text{ のとき } \quad 1 \text{ 個}$$

$$\frac{7}{4} < k < 3 \text{ のとき } \quad 2 \text{ 個}$$

$$k = 3 \text{ のとき } \quad 3 \text{ 個}$$

$$3 < k < \frac{28}{9} \text{ のとき } \quad 4 \text{ 個}$$

$$k = \frac{28}{9} \text{ のとき } \quad 3 \text{ 個}$$

$$(答) \quad \frac{28}{9} < k \text{ のとき } \quad 2 \text{ 個}$$

(3)

$y=g(x)$ が $(-2, 0)$ を通るので,

$$0 = -4 + k$$

$$\therefore k = 4$$

$-2 \leq x \leq 2$ のとき $f(x)g(x) \geq 0$, $x > 2$ のとき $f(x)g(x) < 0$ なので,

$-2 \leq x \leq 2$ の範囲で考えれば良い。

(i) $-2 \leq x \leq -\frac{2}{3}$ のとき

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= (2x+4)(-x^2+4) \\ &= -2x^3-4x^2+8x+16 \end{aligned}$$

右辺を $m_1(x)$ とおくと,

$$\begin{aligned} m_1'(x) &= -6x^2-8x+8 \\ &= -2(3x-2)(x+2) \geq 0 \end{aligned}$$

よって, $-2 \leq x \leq -\frac{2}{3}$ において $f(x)g(x)$ は単調増加し,

$x = -\frac{2}{3}$ のとき最大値をとる。

(ii) $-\frac{2}{3} \leq x \leq 2$ のとき

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= (-x+2)(-x^2+4) \\ &= x^3-2x^2-4x+8 \end{aligned}$$

右辺を $m_2(x)$ とおくと,

$$\begin{aligned} m_2'(x) &= 3x^2-4x-4 \\ &= (3x+2)(x-2) \leq 0 \end{aligned}$$

よって, $-\frac{2}{3} \leq x \leq 2$ において $f(x)g(x)$ は単調減少し,

$x = -\frac{2}{3}$ のとき最大値をとる。

以上 (i), (ii) より, $x \geq -2$ の範囲において, $f(x)g(x)$ は $x = -\frac{2}{3}$ のときに最大値を

とり, その値は,

$$\begin{aligned} f\left(-\frac{2}{3}\right)g\left(-\frac{2}{3}\right) &= \left\{2\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)+4\right\}\left\{-\left(-\frac{2}{3}\right)^2+4\right\} \\ &= \frac{256}{27} \end{aligned}$$

$$(答) \quad x = -\frac{2}{3} \text{ のときに最大値 } \frac{256}{27}$$

2.

(1)

(i) 得点が0点のとき

2枚のカードとも奇数である。その確率は、

$$\frac{{}_6C_2}{{}_{12}C_2} = \frac{5}{22}$$

(ii) 得点が1点のとき

奇数カード、偶数カードの選び方はともに ${}_6C_1=6$ 通り。よってその確率は、

$$\frac{6 \cdot 6}{{}_{12}C_2} = \frac{6}{11}$$

(iii) 得点が2点のとき

2枚のカードとも偶数である。その確率は、

$$\frac{{}_6C_2}{{}_{12}C_2} = \frac{5}{22}$$

以上 (i), (ii), (iii) より、求める期待値は

$$0 \cdot \frac{5}{22} + 1 \cdot \frac{6}{11} + 2 \cdot \frac{5}{22} = 1$$

(答) 1

(2)

(i) 基本ルールで0点のとき

2をかけられたとしても得点は0点のままである。確率は(1)より、

$$\frac{5}{22}$$

(ii) 基本ルールで1点のとき

・3の倍数のカードが0枚で1点のとき

奇数カードは1, 5, 7, 11の4通り。偶数カードは2, 4, 8, 10の4通り。よって確率は、

$$\frac{4 \cdot 4}{{}_{12}C_2} = \frac{8}{33}$$

・3の倍数のカードが1枚で2点のとき

奇数カードが3の倍数の場合は、奇数カードは3または9、偶数カードは前述の4通りなので、確率は

$$\frac{2 \cdot 4}{{}_{12}C_2} = \frac{4}{33}$$

偶数カードが3の倍数の場合は、偶数カードは6または12、奇数カードは前述の4通りなので、確率は

$$\frac{2 \cdot 4}{{}_{12}C_2} = \frac{4}{33}$$

よって、3の倍数のカードが1枚で2点となる確率は

$$\frac{4}{33} + \frac{4}{33} = \frac{8}{33}$$

・3の倍数のカードが2枚で4点のとき

奇数カードは3または9、偶数カードは6または12なので、確率は

$$\frac{2 \cdot 2}{{}_{12}C_2} = \frac{2}{33}$$

(iii) 基本ルールで2点のとき

・3の倍数のカードが0枚で2点のとき

カードは2, 4, 8, 10のいずれかである。よって確率は、

$$\frac{{}_4C_2}{{}_{12}C_2} = \frac{1}{11}$$

・3の倍数のカードが1枚で4点のとき

1枚は6または12、他方は2, 4, 8, 10のいずれかである。よって確率は、

$$\frac{2 \cdot 4}{{}_{12}C_2} = \frac{4}{33}$$

・3の倍数のカードが2枚で8点のとき

2枚のカードが6と12のときのみである。よって確率は、

$$\frac{1}{{}_{12}C_2} = \frac{1}{66}$$

以上 (i), (ii), (iii) より、求める期待値は

$$0 \cdot \frac{5}{22} + 1 \cdot \frac{8}{33} + 2 \cdot \frac{8}{33} + 4 \cdot \frac{2}{33} + 2 \cdot \frac{1}{11} + 4 \cdot \frac{4}{33} + 8 \cdot \frac{1}{66} = \frac{58}{33}$$

(答) $\frac{58}{33}$

(3)

(2)で場合分けしたもののうち、6の倍数のカードが含まれていて、得点が変わる場合を書き下すと、以下のようになる。

(ii) 基本ルールで1点のとき

・3の倍数のカードが1枚のときで偶数カードが3の倍数の場合 $2+6=8$ 点・3の倍数のカードが2枚のとき $4+6=10$ 点

(iii) 基本ルールで2点のとき

・3の倍数のカードが1枚のとき $4+6=10$ 点・3の倍数のカードが2枚のとき $8+6=14$ 点

他の場合の得点は変わらないので、求める期待値は

$$0 \cdot \frac{5}{22} + 1 \cdot \frac{8}{33} + 2 \cdot \frac{4}{33} + 8 \cdot \frac{4}{33} + 10 \cdot \frac{2}{33} + 2 \cdot \frac{1}{11} + 10 \cdot \frac{4}{33} + 14 \cdot \frac{1}{66} = \frac{11}{3}$$

(答) $\frac{11}{3}$

3.

(1)

$$\begin{aligned}
S_5 &= (1-2)^2 + (1-3)^2 + (1-4)^2 + (1-5)^2 \\
&\quad + (2-3)^2 + (2-4)^2 + (2-5)^2 \\
&\quad + (3-4)^2 + (3-5)^2 \\
&\quad + (4-5)^2 \\
&= 4 \cdot 1^2 + 3 \cdot 2^2 + 2 \cdot 3^2 + 1 \cdot 4^2 \\
&= 50
\end{aligned}$$

(答) $S_5 = 50$

(2)

$$(x-1)^4 - x^4 = -4x^3 + 6x^2 - 4x + 1$$

に $x=1, 2, 3, \dots, n$ をそれぞれ代入して得られる式の辺々を足し合わせると,

$$\sum_{k=1}^n \{ (k-1)^4 - k^4 \} = \sum_{k=1}^n (-4k^3 + 6k^2 - 4k + 1)$$

$$\therefore -n^4 = -4 \sum_{k=1}^n k^3 + 6 \sum_{k=1}^n k^2 - 4 \sum_{k=1}^n k + n$$

ここで,

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$$

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{1}{2} n(n+1)$$

を上で得られた式に代入して整理すると,

$$\begin{aligned}
4 \sum_{k=1}^n k^3 &= n^4 + n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1) + n \\
&= n(n^3 + 1) + n(n+1)(2n-1) \\
&= n(n+1)(n^2 + n) \\
&= \{n(n+1)\}^2 \\
\therefore \sum_{k=1}^n k^3 &= \frac{1}{4} \{n(n+1)\}^2
\end{aligned}$$

$$(答) \sum_{k=1}^n k^3 = \frac{1}{4} \{n(n+1)\}^2$$

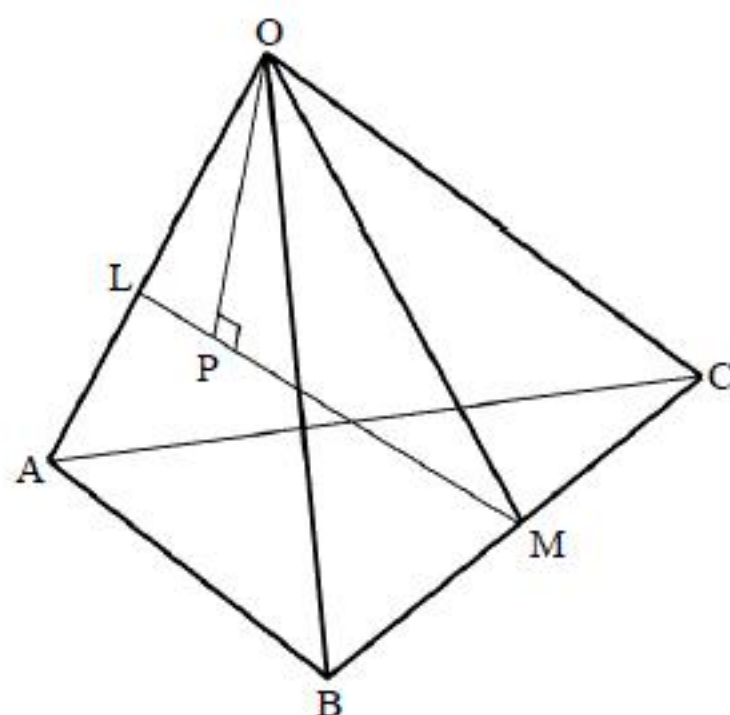
(3)

(1)の考え方より,

$$\begin{aligned}
S_n &= (n-1) \cdot 1^2 + (n-2) \cdot 2^2 + \dots + 1 \cdot (n-1)^2 \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) k^2 \\
&= n \sum_{k=1}^{n-1} k^2 - \sum_{k=1}^{n-1} k^3 \\
&= n \cdot \frac{1}{6} (n-1) \cdot n \cdot (2n-1) - \frac{1}{4} \{ (n-1)n \}^2 \\
&= \frac{1}{12} n^2 (n-1)(n+1)
\end{aligned}$$

$$(答) \frac{1}{12} n^2 (n-1)(n+1)$$

4.



(1)

$\triangle OBC$ は 1 辺の長さが 1 の正三角形なので, $OM = \frac{\sqrt{3}}{2}$ である。また,

$$\begin{aligned} |\overline{OP}| &= |\overline{OM}| \cdot \cos \theta \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

したがって,

$$\begin{aligned} \overline{OP} \cdot \overline{OM} &= |\overline{OP}| \cdot |\overline{OM}| \cdot \cos \theta \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

(答) $\frac{1}{2}$

(2)

$$\begin{aligned} \overline{OM} &= \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c} \\ \overline{OL} &= s\vec{a} \\ \overline{OP} &= (1-t)\overline{OL} + t\overline{OM} \\ &= s(1-t)\vec{a} + \frac{t}{2}\vec{b} + \frac{t}{2}\vec{c} \quad \cdots \textcircled{1} \\ \overline{LM} &= \overline{OM} - \overline{OL} \end{aligned}$$

ここで,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} = 1 \cdot 1 \cdot \cos 60^\circ = \frac{1}{2}, |\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$$

を用いて計算すると,

$$\begin{aligned} \overline{OP} \cdot \overline{OM} &= \left\{ s(1-t)\vec{a} + \frac{t}{2}\vec{b} + \frac{t}{2}\vec{c} \right\} \cdot \left(\frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c} \right) \\ &= \frac{2s - 2st + 3t}{4} \\ \overline{OP} \cdot \overline{LM} &= \left\{ s(1-t)\vec{a} + \frac{t}{2}\vec{b} + \frac{t}{2}\vec{c} \right\} \cdot (\overline{OM} - s\vec{a}) \\ &= \overline{OP} \cdot \overline{OM} - \frac{s(2s - 2st + t)}{2} \end{aligned}$$

$$\overline{OP} \cdot \overline{OM} = \frac{1}{2}, \overline{OP} \cdot \overline{LM} = 0 \quad \text{なので,}$$

$$\begin{cases} \frac{2s - 2st + 3t}{4} = \frac{1}{2} & \cdots \textcircled{2} \\ \frac{s(2s - 2st + t)}{2} = \frac{1}{2} & \cdots \textcircled{3} \end{cases}$$

②を③に代入すると,

$$\frac{s(2 - 2t)}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore t = 1 - \frac{1}{2s} \quad (\because s \neq 0)$$

これを②に代入すると

$$2s - 2s \left(1 - \frac{1}{2s} \right) + 3 \left(1 - \frac{1}{2s} \right) = 2$$

$$\therefore s = \frac{3}{4}$$

$$\text{これより, } t = \frac{1}{3}$$

これらを①に代入すると,

$$\overline{OP} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{6}\vec{b} + \frac{1}{6}\vec{c}$$

$$\text{(答)} \quad \overline{OP} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{6}\vec{b} + \frac{1}{6}\vec{c}$$

(3)

点 Q は直線 AB 上の点なので, m を実数として

$$\overline{OQ} = m\vec{a} + (1-m)\vec{b}$$

と表せる。また, 点 Q は平面 OPC 上の点なので, k, l を実数として

$$\begin{aligned} \overline{OQ} &= k\overline{OP} + l\overline{OC} \\ &= \frac{k}{2}\vec{a} + \frac{k}{6}\vec{b} + \left(\frac{k}{6} + l \right) \vec{c} \end{aligned}$$

と表せる。 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ は互いに一次独立なので, 2 式の係数を比較すると

$$\begin{cases} m = \frac{k}{2} \\ 1 - m = \frac{k}{6} \\ 0 = \frac{k}{6} + l \end{cases}$$

これを解いて,

$$m = \frac{3}{4}, k = \frac{3}{2}, l = -\frac{1}{4}$$

よって,

$$\overline{OQ} = \frac{3}{4}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}$$

$$\text{(答)} \quad \overline{OQ} = \frac{3}{4}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}$$