

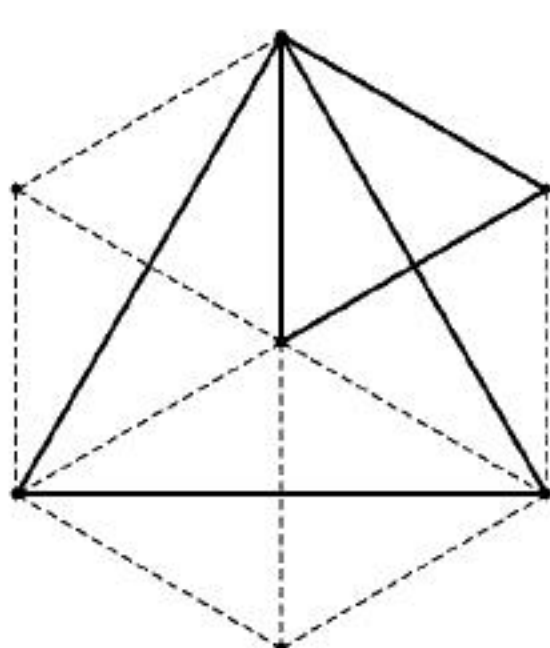
1.

(1)

すべての選び方は

$${}_7C_3 = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 35 \text{ 通り}$$

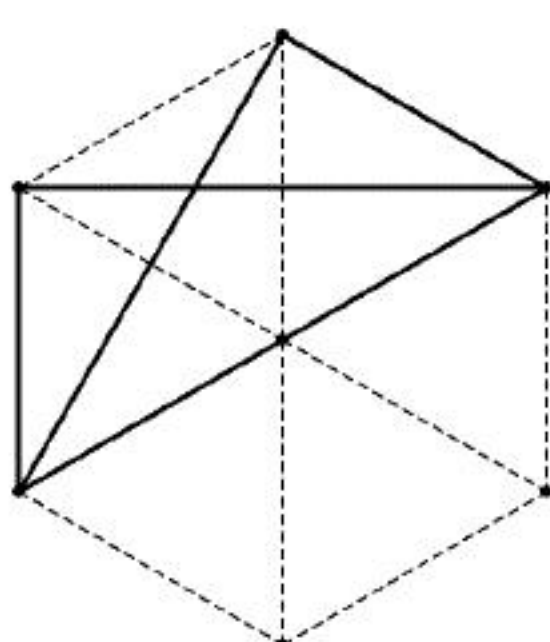
次図に示すように、一辺の長さが1の正三角形 (面積 $\frac{\sqrt{3}}{4}$) は6通りでき、一辺の長さが $\sqrt{3}$ の正三角形 (面積 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$) の場合は2通りできる。



よって図形 A が正三角形になる確率は、

$$\frac{6+2}{35} = \frac{8}{35}$$

直角三角形 (面積 $\frac{\sqrt{3}}{4}$) になる場合は、次図のような場合で、



六角形の対角線に対し、4つずつ直角三角形が作れるため、

$$4 \cdot 3 = 12 \text{ 通り}$$

よってその確率は、

$$\frac{12}{35}$$

となる。

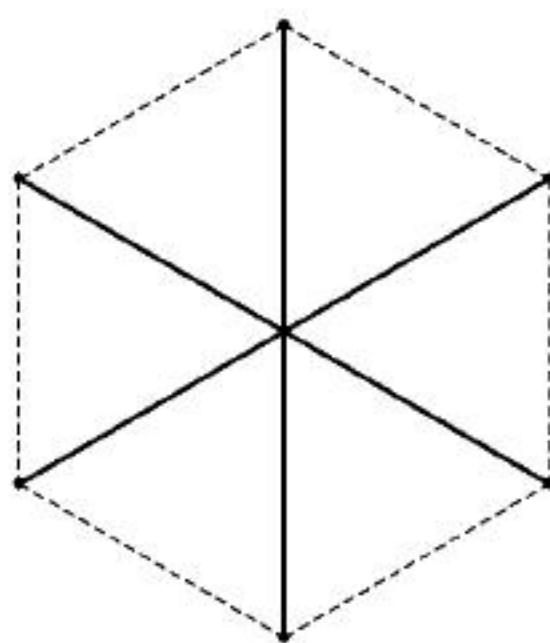
三角形にならない場合は、図形が一直線になるときのみで、次図に示すように

3通り

なので、その確率は、

$$\frac{3}{35}$$

となる。



$$(\text{答}) \text{ 正三角形 : } \frac{8}{35}, \text{ 直角三角形 : } \frac{12}{35}, \text{ 三角形にならない : } \frac{3}{35}$$

(2)

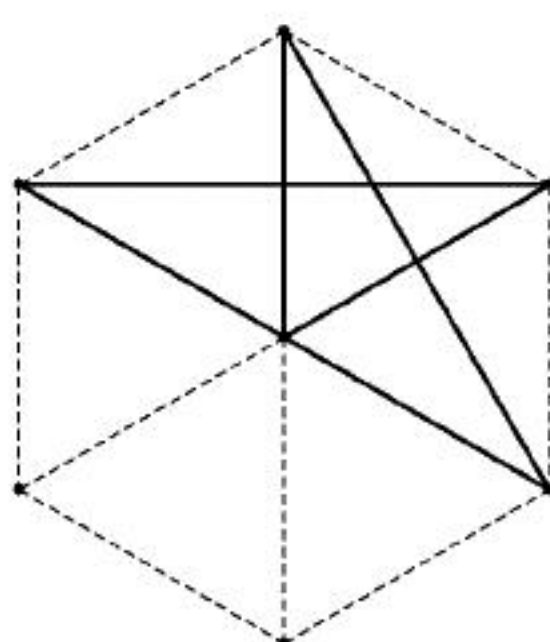
次図のような三辺の長さが $1, 1, \sqrt{3}$ の二等辺三角形 (面積 $\frac{\sqrt{3}}{4}$) になるのは、

外周のみの3点で6通り、中心と外周の2点で6通りであることから、

$$6+6=12 \text{ 通り}$$

なので、その確率は

$$\frac{12}{35}$$



以上より、図形 A の面積の期待値は

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{6}{35} + \frac{3\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{2}{35} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{12}{35} + 0 \cdot \frac{3}{35} + \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{12}{35} = \frac{12\sqrt{3}}{35}$$

$$(\text{答}) \frac{12\sqrt{3}}{35}$$

2.

(1)

行列 A について、ハミルトン・ケーリーの定理より

$$A^2 - (a+c)A + (ac-b)E = O$$

$$\therefore A^2 = (a+c)A - (ac-b)E$$

が成り立つので、 $A^2 - 4A + 8E = O$ に代入し整理すると、

$$(a+c-4)A = (ac-b-8)E$$

行列 A は明らかに E の定数倍ではないので、

$$a+c-4=0, -ac+b+8=0$$

よって

$$b = -a^2 + 4a - 8, c = -a + 4$$

$$(\text{答}) \quad b = -a^2 + 4a - 8, c = -a + 4$$

(2)

(1) の結果を用いると、

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{pmatrix} a^2+b & a+c \\ b(a+c) & b+c^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4a-8 & 4 \\ 4(-a^2+4a-8) & -4a+8 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。これが $\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ と等しいことから、

$$y = 4$$

となる。

$$(\text{答}) \quad y = 4$$

(3)

(2) より

$$A^2 = 4 \begin{pmatrix} a-2 & 1 \\ -a^2+4a-8 & -a+2 \end{pmatrix}$$

であり、これは $A^2 = kE$ とならないので不適である。

$$A^3 = 4A^2 - 8A$$

$$= 4(4A - 8E) - 8A$$

$$= 8A - 32E$$

より、これも $A^3 = kE$ とはならない。同様にして、

$$A^4 = 8A^2 - 32A$$

$$= 8(4A - 8E) - 32A$$

$$= -64E$$

これは題意を満たしている。よって、求める最小の自然数 n とそのときの実数 k は、

$$n = 4, k = -64$$

である。

$$(\text{答}) \quad n = 4, k = -64$$

3.

(1)

$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{OP} = \vec{p}$ と書く。

$$\begin{aligned}\vec{p} &= (1-t)\overrightarrow{OL} + t\overrightarrow{OM} \\ &= \frac{3(1-t)}{4}\vec{a} + \frac{t}{2}\vec{b} + \frac{t}{2}\vec{c}\end{aligned}$$

であるから,

$$|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} = \frac{1}{2}$$

であることを用いて,

$$\begin{aligned}|\vec{p}|^2 &= \frac{9(1-t)^2}{16} + \frac{t^2}{4} + \frac{t^2}{4} + \frac{3(1-t)}{4} \cdot \frac{t}{2} + \frac{t}{2} \cdot \frac{t}{2} + \frac{3(1-t)}{4} \cdot \frac{t}{2} \\ &= \frac{3}{16}(3t^2 - 2t + 3)\end{aligned}$$

したがって,

$$|\vec{p}| = \frac{\sqrt{3(3t^2 - 2t + 3)}}{4}$$

(答) $\frac{\sqrt{3(3t^2 - 2t + 3)}}{4}$

(2)

$\overrightarrow{OM} = \vec{m}$ とおく。

$$\begin{aligned}\vec{p} \cdot \vec{m} &= \left\{ \frac{3(1-t)}{4}\vec{a} + \frac{t}{2}\vec{b} + \frac{t}{2}\vec{c} \right\} \cdot \left(\frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c} \right) \\ &= \frac{3(1-t)}{8} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3(1-t)}{8} \cdot \frac{1}{2} + \frac{t}{4} + \frac{t}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{t}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{t}{4} \\ &= \frac{3(1+t)}{8}\end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \frac{\vec{p} \cdot \vec{m}}{|\vec{p}| |\vec{m}|} \\ &= \frac{\frac{3(1+t)}{8}}{\frac{\sqrt{3(3t^2 - 2t + 3)}}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} \\ &= \frac{1+t}{\sqrt{3t^2 - 2t + 3}}\end{aligned}$$

よって, $\cos \theta = \frac{\sqrt{6}}{3}$ を考えて,

$$\frac{1+t}{\sqrt{3t^2 - 2t + 3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

これを整理すると,

$$3t^2 - 10t + 3 = 0$$

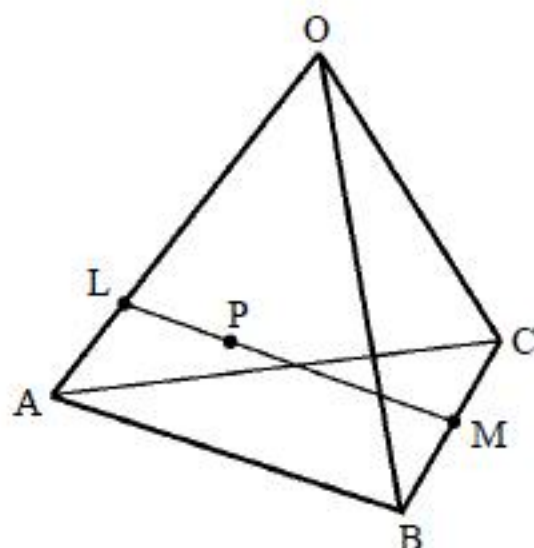
$$(3t-1)(t-3) = 0$$

となる。題意より, $0 < t < 1$ なので,

$$t = \frac{1}{3}$$

となる。

(答) $t = \frac{1}{3}$



4.

$$|x-a|\sin^2 x = \begin{cases} -(x-a)\sin^2 x & (0 \leq x \leq a) \\ (x-a)\sin^2 x & (a \leq x \leq \pi) \end{cases}$$

であるから,

$$\begin{aligned} S &= -\int_0^a (x-a)\sin^2 x \, dx + \int_a^\pi (x-a)\sin^2 x \, dx \\ &= -\frac{1}{2}\int_0^a (x-a)(1-\cos 2x) \, dx + \frac{1}{2}\int_a^\pi (x-a)(1-\cos 2x) \, dx \end{aligned}$$

ここで部分積分を用いて,

$$\begin{aligned} S &= -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(x-a)^2 - \frac{1}{2}(x-a)\sin 2x - \frac{1}{4}\cos 2x\right]_0^a \\ &\quad + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(x-a)^2 - \frac{1}{2}(x-a)\sin 2x - \frac{1}{4}\cos 2x\right]_a^\pi \\ &= -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}\cos 2a - \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}(\pi-a)^2 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\cos 2a\right\} \\ &= \frac{1}{4}(\pi^2 - 2\pi a + 2a^2 + \cos 2a - 1) \end{aligned}$$

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{4}(\pi^2 - 2\pi a + 2a^2 + \cos 2a - 1)$$