1.

(1)

3 回目の試行が終了した時点で,

袋に入っている球の数が 0 個の確率： $p^3+2p^2(1-p)$

袋に入っている球の数が 1 個の確率： $p^2(1-p)+2p(1-p)^2$

袋に入っている球の数が 2 個の確率： $p(1-p)^2$

袋に入っている球の数が 3 個の確率： $(1-p)^3$

ゆえに期待値は,

$$1\times\left\{p^2(1-p)+2p(1-p)^2\right\}+2\times p(1-p)^2+3\times(1-p)^3=(1-p)(3-2p)$$

(答) $(1-p)(3-2p)$

(2)

5 回目の試行が終了した時点で, 袋に球が入っていない確率を求める。

[1] 3 回目の試行が終了した時点で, 袋に入っている球の数が 0 個の場合

4 回目が裏で 5 回目が表か, 4 回目も 5 回目も表だと球の数が 0 個になるので,

$$\left\{p^3+2p^2(1-p)\right\}\times\left\{(1-p)p+p^2\right\}=p^3(2-p)$$

[2] 3 回目の試行が終了した時点で, 球の数が 1 個もしくは 2 個の場合

4 回目も 5 回目も表が出なければならないので,

$$\left\{p^2(1-p)+2p(1-p)^2+p(1-p)^2\right\}\times p^2=p^3(1-p)(3-2p)$$

以上 [1], [2] より, 袋に球が入っていない確率は,

$$p^3(2-p)+p^3(1-p)(3-2p)=p^3\left(2p^2-6p+5\right)$$

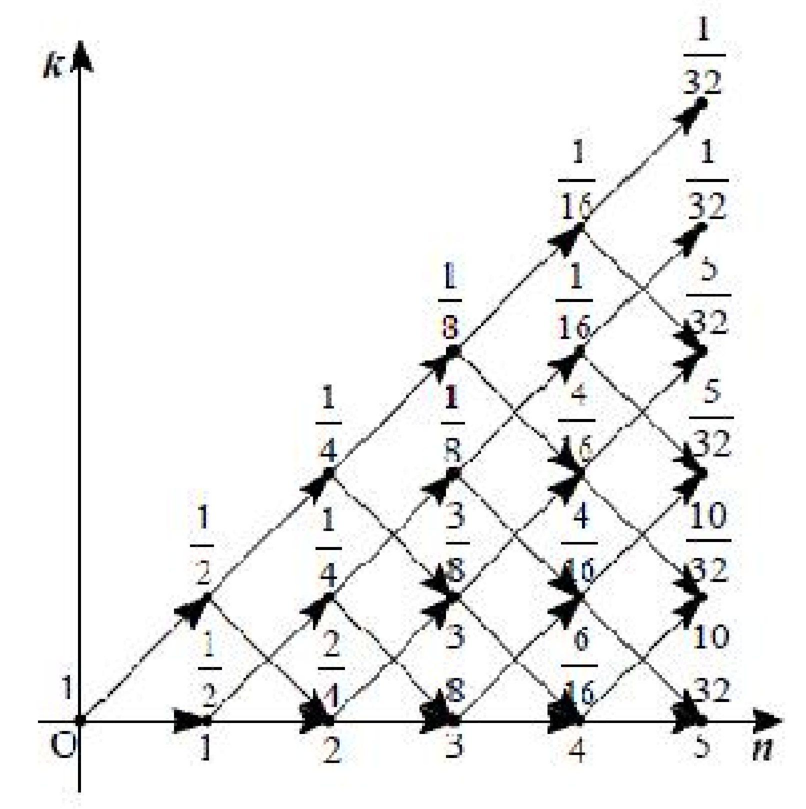
ゆえに袋に球が入っている確率は,

$$1-p^3\left(2p^2-6p+5\right)$$

(答) $1-p^3\left(2p^2-6p+5\right)$

(3)

$p=\dfrac{1}{2}$ のとき、n 回目の試行が終了した時点で、袋に球が k 個入っている確率を $p(n,k)$ とおく。$n=5$ までの確率を調べてみると, 以下の図のようになることがわかる。



上図より, $p(n,k)\ (0\leqq k\leqq n)$ は次のように推測できる。

n が奇数かつ k が奇数のとき $p(n,k)={}_n\mathrm{C}_{\frac{n+k}{2}}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

n が奇数かつ k が偶数のとき $p(n,k)={}_n\mathrm{C}_{\frac{n+k+1}{2}}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

n が偶数かつ k が奇数のとき $p(n,k)={}_n\mathrm{C}_{\frac{n+k+1}{2}}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

n が偶数かつ k が偶数のとき $p(n,k)={}_n\mathrm{C}_{\frac{n+k}{2}}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

つまり, まとめると

$n+k$ が偶数のとき $p(n,k)={}_n\mathrm{C}_{\frac{n+k}{2}}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

$n+k$ が奇数のとき $p(n,k)={}_n\mathrm{C}_{\frac{n+k+1}{2}}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

となると推測できる。これを数学的帰納法によって示す。

[1] $n=1, 2$ のとき成立することを示す

上図より, $p(1,1)=p(1,0)=\dfrac{1}{2}$, $p(2,2)=p(2,1)=\dfrac{1}{4}$, $p(2,0)=\dfrac{2}{4}$ であるから

$$p(1,1)={}_1\mathrm{C}_{\frac{1+1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^1,\ p(1,0)={}_1\mathrm{C}_{\frac{1+0+1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^1$$

$$p(2,2)={}_2\mathrm{C}_{\frac{2+2}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^2\ p(2,1)={}_2\mathrm{C}_{\frac{2+1+1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$p(2,0)={}_2\mathrm{C}_{\frac{2+0}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

を満たす。

[2] $n=m\,(\geqq 2)$ のとき成立することを仮定し, $n=m+1$ のとき成立することを示す

$p(n,k)$ は漸化式

$$p(n+1,n+1)=\frac{1}{2}p(n,n)$$

$$p(n+1,n)=\frac{1}{2}p(n,n-1)$$

$$p(n+1,k)=\frac{1}{2}p(n,k+1)+\frac{1}{2}p(n,k-1)\quad(1\leqq k\leqq n-1)$$

$$p(n+1,0)=\frac{1}{2}p(n,1)+\frac{1}{2}p(n,0)$$

を満たす。$n=m$ のときの成立を仮定すると, 以上の漸化式と合わせて

$$\begin{aligned}p(m+1,m+1)&=\frac{1}{2}p(m,m)\\&=\frac{1}{2}\cdot{}_m\mathrm{C}_{\frac{m+m}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^m\\&={}_{m+1}\mathrm{C}_{\frac{(m+1)+(m+1)}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{m+1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}p(m+1,m)&=\frac{1}{2}p(m,m-1)\\&=\frac{1}{2}\cdot{}_m\mathrm{C}_{\frac{m+(m-1)+1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^m\\&={}_{m+1}\mathrm{C}_{\frac{(m+1)+m+1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{m+1}\end{aligned}$$

であり, また,

[i] $(m+1)+k$ が偶数のとき, 二項係数の関係式 ${}_N\mathrm{C}_K+{}_N\mathrm{C}_{K-1}={}_{N+1}\mathrm{C}_K$ より

$$\begin{aligned}p(m+1,k)&=\frac{1}{2}p(m,k+1)+\frac{1}{2}p(m,k-1)\\&=\frac{1}{2}\cdot{}_m\mathrm{C}_{\frac{m+(k+1)}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^m+\frac{1}{2}\cdot{}_m\mathrm{C}_{\frac{m+(k-1)}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^m\\&={}_{m+1}\mathrm{C}_{\frac{(m+1)+k}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{m+1}\end{aligned}$$

[ii] $(m+1)+k$ が奇数のとき, 二項係数の関係式 ${}_N\mathrm{C}_K+{}_N\mathrm{C}_{K-1}={}_{N+1}\mathrm{C}_K$ より

$$\begin{aligned}p(m+1,k)&=\frac{1}{2}p(m,k+1)+\frac{1}{2}p(m,k-1)\\&=\frac{1}{2}\cdot{}_m\mathrm{C}_{\frac{m+(k+1)+1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^m+\frac{1}{2}\cdot{}_m\mathrm{C}_{\frac{m+(k-1)+1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^m\\&={}_{m+1}\mathrm{C}_{\frac{(m+1)+k+1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{m+1}\end{aligned}$$

であり, さらに

[i] $m+1$ が偶数のとき, 二項係数の関係式 ${}_N\mathrm{C}_K+{}_N\mathrm{C}_{K-1}={}_{N+1}\mathrm{C}_K$ より

$$\begin{aligned}p(m+1,0)&=\frac{1}{2}p(m,1)+\frac{1}{2}p(m,0)\\&=\frac{1}{2}\cdot{}_m\mathrm{C}_{\frac{m+1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^m+\frac{1}{2}\cdot{}_m\mathrm{C}_{\frac{m+0+1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^m\\&={}_{m+1}\mathrm{C}_{\frac{(m+1)+0}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{m+1}\end{aligned}$$

[ii] $m+1$ が奇数のとき, 二項係数の関係式 ${}_N\mathrm{C}_K+{}_N\mathrm{C}_{K-1}={}_{N+1}\mathrm{C}_K$ より

$$\begin{aligned}p(m+1,0)&=\frac{1}{2}p(m,1)+\frac{1}{2}p(m,0)\\&=\frac{1}{2}\cdot{}_m\mathrm{C}_{\frac{m+1+1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^m+\frac{1}{2}\cdot{}_m\mathrm{C}_{\frac{m+0}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^m\\&={}_{m+1}\mathrm{C}_{\frac{(m+1)+0+1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{m+1}\end{aligned}$$

を満たす。

以上[1], [2]より, 数学的帰納法によって, すべての自然数 n について $p(n,k)\ (0\leqq k\leqq n)$ は

$n+k$ が偶数のとき $p(n,k)={}_n\mathrm{C}_{\frac{n+k}{2}}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

$n+k$ が奇数のとき $p(n,k)={}_n\mathrm{C}_{\frac{n+k+1}{2}}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

であることが示された。また, $k\geqq n+1$ のときは $p(n,k)=0$ である。

(答) $\begin{cases}{}_n\mathrm{C}_{\frac{n+k}{2}}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n & (0\leqq k\leqq n \text{ かつ } n+k \text{ が偶数のとき})\\ {}_n\mathrm{C}_{\frac{n+k+1}{2}}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n & (0\leqq k\leqq n \text{ かつ } n+k \text{ が奇数のとき})\\ 0 & (k\geqq n+1 \text{ のとき})\end{cases}$

2.

(1)

直線 l 上の点Rは，xyz 空間の原点をOとすると，実数 k を用いて

$$\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OP}+k\,\overrightarrow{PQ}$$
$$=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k\\k-1\\-2k+1\end{pmatrix}$$

と表すことができる。

点Rが平面 $z=0$ 上にあるとき，

$$-2k+1=0$$
$$\therefore\ k=\frac{1}{2}$$

であり，このとき

$$\mathrm{R}:\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0\right)$$

断面 B は半径ORの円なので

$$S_1=\pi\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2\right\}=\frac{\pi}{2}$$

(答) $S_1=\dfrac{\pi}{2}$

(2)

立体 A を平面 $z=t$ で切った断面の面積を $S(t)$ とする。(ただし，$-1\leqq t\leqq 1$)

点Rが平面 $z=t$ 上にあるとき，つまり

$$-2k+1=t$$
$$\therefore\ k=\frac{1-t}{2}$$

であり，このとき，

$$\mathrm{R}:\left(\frac{1-t}{2},-\frac{1+t}{2},t\right)$$

となり，断面は半径 $\sqrt{\left(\frac{1-t}{2}\right)^2+\left(-\frac{1+t}{2}\right)^2}$ の円なので，

$$S(t)=\pi\left\{\left(\frac{1-t}{2}\right)^2+\left(-\frac{1+t}{2}\right)^2\right\}$$
$$=\frac{1+t^2}{2}\pi$$

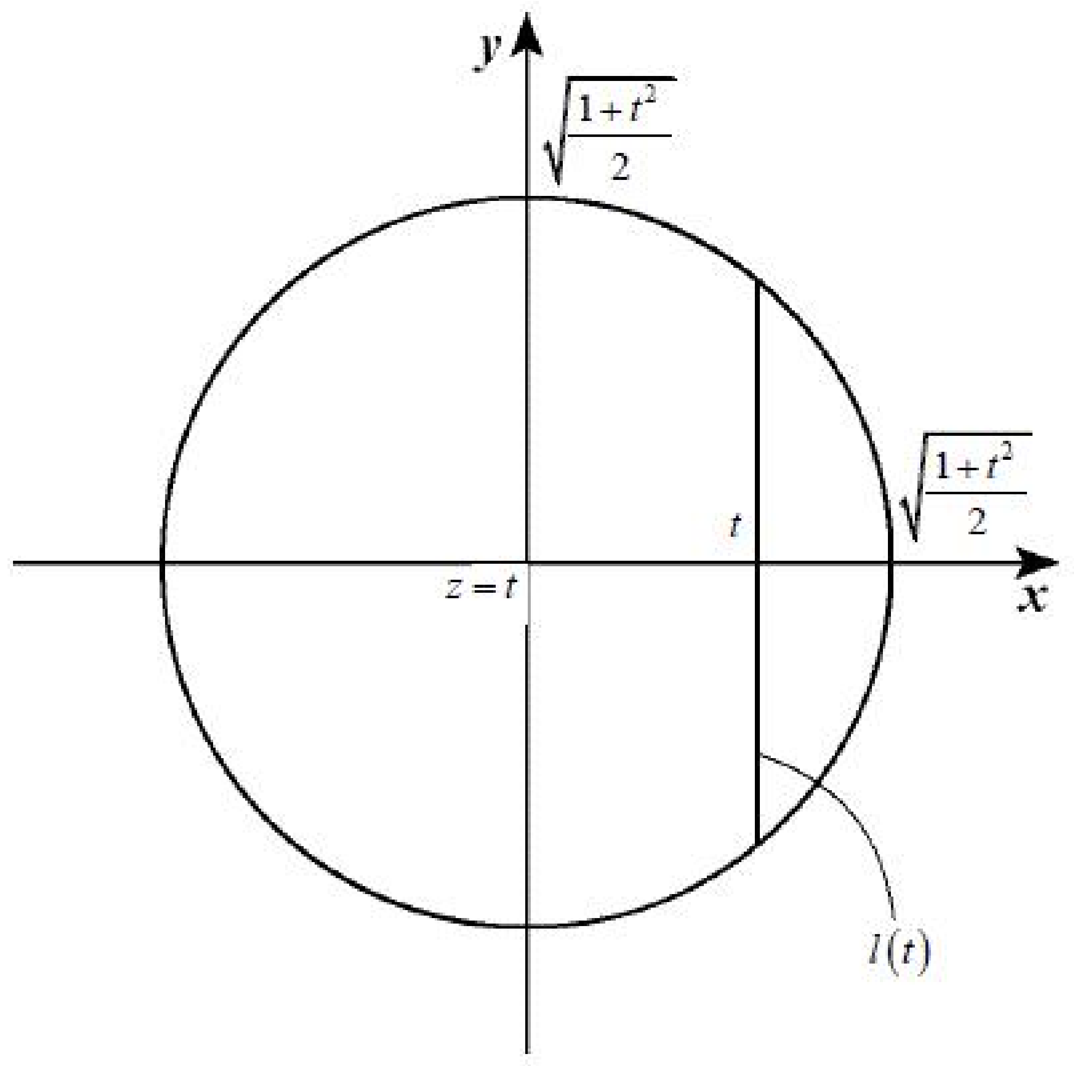
ゆえに

$$V=\int_{-1}^{1}S(t)\,dt$$
$$=\int_{-1}^{1}\frac{1+t^2}{2}\pi\,dt$$
$$=\pi\left[\frac{1}{2}t+\frac{1}{6}t^3\right]_{-1}^{1}$$
$$=\frac{4}{3}\pi$$

(答) $V=\dfrac{4}{3}\pi$

(3)

立体 A を平面 $z=t$ で切った断面は次図のように半径 $\sqrt{\dfrac{1+t^2}{2}}$ の円であり，この円と平面 $x=t$ とが交ってできた線分は図に示した通りである。



この線分の長さ $l(t)$ は，

$$l(t)=2\sqrt{\left(\frac{1+t^2}{2}\right)-t^2}=2\sqrt{\frac{1-t^2}{2}}$$

断面 C を yz 平面に射影した図形を D とする。D の面積 S_3 は，

$$S_3=\int_{-1}^{1}l(t)dt$$
$$=2\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-t^2}{2}}\ dt$$
$$=4\int_{0}^{1}\sqrt{\frac{1-t^2}{2}}\ dt$$
$$=\frac{4}{\sqrt{2}}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,d\theta$$
$$=2\sqrt{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta$$
$$=2\sqrt{2}\left[\frac{1}{2}\theta+\frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi$$

である。ただし途中で $t=\sin\theta$ と置換した。S_2 と S_3 の関係は，$z=x$ からの射影なので，

$$S_3=S_2\cos\frac{\pi}{4}$$
$$\therefore\ S_2=\sqrt{2}\times S_3=\pi$$

(答) $S_2=\pi$

3.

(1)

対称性より M が xz 平面上にあるとしても一般性は失われない。

M の影を M′ とすると次図より，

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\\0\\\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\\0\\1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{PM}}=\overrightarrow{\mathrm{OM}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\begin{pmatrix}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\\0\\1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\0\\1+\sqrt{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\\0\\\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta-\sqrt{3}\end{pmatrix}$$

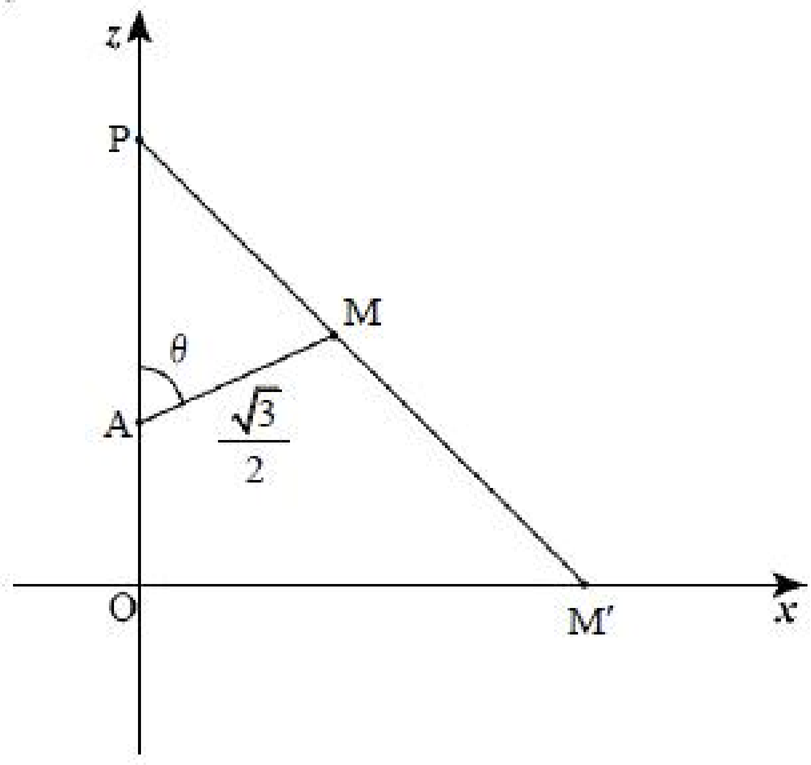
$\mathrm{M}'(t,0,0)$ とおくと，直線 PM 上で z 座標が 0 になればよいので，実数 s を用いて，

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}'}=\begin{pmatrix}t\\0\\0\end{pmatrix}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+s\overrightarrow{\mathrm{PM}}=\begin{pmatrix}\dfrac{\sqrt{3}\,s}{2}\sin\theta\\0\\1+\sqrt{3}+s\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta-\sqrt{3}\right)\end{pmatrix}$$

よって

$$s=\frac{2\sqrt{3}+6}{6-3\cos\theta}$$

$$t=\frac{\left(1+\sqrt{3}\right)\sin\theta}{2-\cos\theta}$$

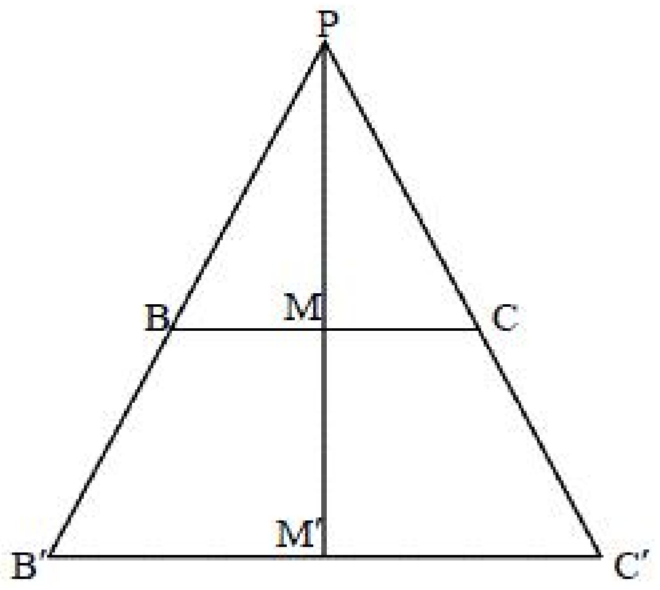


次図より

$$\mathrm{PM}:\mathrm{PM}'=\mathrm{BC}:\mathrm{B'C'}=1:s$$

よって

$$\mathrm{B'C'}=s$$



以上より

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}\mathrm{OM}'\cdot\mathrm{B'C'}\\&=\frac{1}{2}st\\&=\frac{6+4\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\sin\theta}{\left(2-\cos\theta\right)^2}\end{aligned}$$

（答） $S=\dfrac{6+4\sqrt{3}}{3}\cdot\dfrac{\sin\theta}{\left(2-\cos\theta\right)^2}$

(2)

$$f(\theta)=\frac{\sin\theta}{\left(2-\cos\theta\right)^2}$$

とおくと，

$$f'(\theta)=\frac{\cos^2\theta+2\cos\theta-2}{\left(2-\cos\theta\right)^3}$$

より，$f(\theta)$ の増減表は次のようになる。

θ	0	$\cdots$	α	$\cdots$	π
$f'(\theta)$	+	+	0	−	−
$f(\theta)$	0	↗	$f(\alpha)$	↘	0

ここで α は

$$\cos\alpha^2+2\cos\alpha-2=0$$

より

$$\cos\alpha=-1+\sqrt{3}$$

をみたす。$\theta=\alpha$ のとき $f(\theta)$ は最大になり，面積 S も最大になる。

（答） $-1+\sqrt{3}$