

(1)

行列  $A$  が逆行列を持つと仮定する。

$A^k = O$  の両辺に  $(A^{-1})^k$  を左からかけると、

$$(A^{-1})^k A^k = O \Leftrightarrow E = O$$

となり、矛盾する。

したがって、仮定が誤りであり、行列  $A$  は逆行列を持たないことが示された。

(証明終)

(2)

行列  $A$  は逆行列を持たないので、

$$\det A = 0 \Leftrightarrow ad - bc = 0$$

である。また、ケーリー・ハミルトンの定理より、

$$\begin{aligned} A^2 - (a+d)A + (ad-bc)E &= O \\ \Leftrightarrow A^2 &= (a+d)A \quad \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

が成り立つから、これを繰り返し用いると

$$\begin{aligned} A^k &= A^{k-2} A^2 \\ &= (a+d) A^{k-1} \\ &= \cdots \\ &= (a+d)^{k-1} A \\ &= O \end{aligned}$$

となる。ここで、 $b \neq 0$  より、 $A \neq O$  であるから、

$$a+d=0$$

である。これを①に代入して、

$$A^2 = O$$

となることが示された。

(証明終)

(3)

$$\begin{cases} ad-bc=0 \\ a+d=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=-\frac{a^2}{b} \\ d=-a \end{cases}$$

であるから、

$$\begin{aligned} \det(A-pE) &= \det \begin{pmatrix} a-p & b \\ -\frac{a^2}{b} & -a-p \end{pmatrix} \\ &= (a-p)(-a-p) - b \cdot \left(-\frac{a^2}{b}\right) \\ &= p^2 \neq 0 \end{aligned}$$

である。したがって、 $A-pE$  は逆行列を持ち、

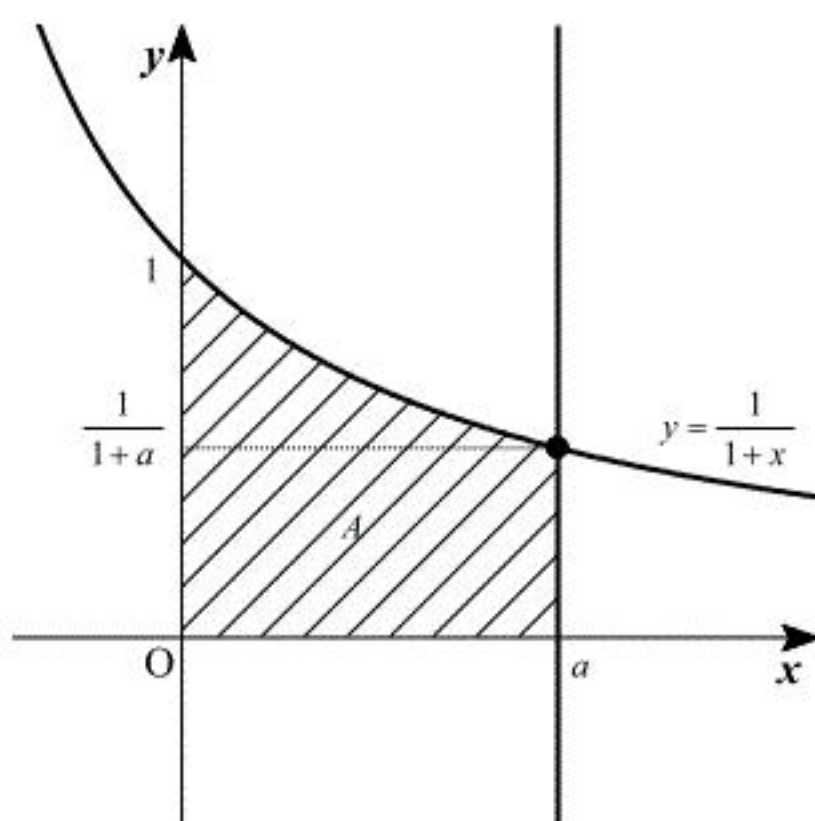
$$(A-pE)^{-1} = \frac{1}{p^2} \begin{pmatrix} -a-p & -b \\ \frac{a^2}{b} & a-p \end{pmatrix}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad \frac{1}{p^2} \begin{pmatrix} -a-p & -b \\ \frac{a^2}{b} & a-p \end{pmatrix}$$

2

(1)



領域  $A$  は、上図の斜線部である。したがって、

$$\begin{aligned} V_1 &= \int_0^a \pi \left( \frac{1}{1+x} \right)^2 dx \\ &= \left[ \frac{-\pi}{1+x} \right]_0^a \\ &= \frac{a}{1+a} \pi \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad V_1 = \frac{a}{1+a} \pi$$

(2)

$$y = \frac{1}{1+x} \Leftrightarrow x = \frac{1}{y} - 1$$

であるから、

$$\begin{aligned} V_2 &= \int_0^{\frac{1}{1+a}} \pi a^2 dy + \int_{\frac{1}{1+a}}^1 \pi \left( \frac{1}{y} - 1 \right)^2 dy \\ &= \frac{a^2}{1+a} \pi + \pi \int_{\frac{1}{1+a}}^1 \left( \frac{1}{y^2} - \frac{2}{y} + 1 \right) dy \\ &= \frac{a^2}{1+a} \pi + \pi \left[ -\frac{1}{y} - 2 \log y + y \right]_{\frac{1}{1+a}}^1 \\ &= 2\pi a - 2\pi \log(1+a) \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad V_2 = 2\pi a - 2\pi \log(1+a)$$

(3)

$$f(a) = V_1 - V_2 = \frac{a}{1+a} \pi - 2\pi a + 2\pi \log(1+a)$$

とおくと、

$$\begin{aligned} f'(a) &= \frac{1+a-a}{(1+a)^2} \pi - 2\pi + \frac{2\pi}{1+a} \\ &= \frac{-2a^2 - 2a + 1}{(1+a)^2} \pi \end{aligned}$$

であるから、 $f(a)$  の増減表は次のようになる。

|         |   |     |                         |     |
|---------|---|-----|-------------------------|-----|
| $a$     | 0 | ... | $\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$ | ... |
| $f'(a)$ |   | +   | 0                       | -   |
| $f(a)$  | 0 | ↗   |                         | ↘   |

増減表より、

$$p = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$$

であることが分かる。また、 $\sqrt{3} < 3$  であることを用いると

$$p = \frac{-1+\sqrt{3}}{2} < \frac{-1+3}{2} = 1$$

となり、 $p < 1$  が示された。

$$(\text{答}) \quad p = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$$

(4)

$p < a < 1$  において  $f(a) = 0$  となる  $a$  が存在することを示せばよい。

増減表より、 $p < a < 1$  において  $f(a)$  は単調減少し、 $f(p) > 0$  であることが分かる。

また、

$$f(1) = 2\pi \left( \log 2 - \frac{3}{4} \right) < 2\pi (0.7 - 0.75) = -0.1\pi < 0$$

である。したがって、 $f(a)$  が閉区間  $[p, 1]$  で連続であることから中間値の定理より題意は示された。

(証明終)

(1)

頂点 A から頂点 B まで最短距離で進むには、  
合わせて左に 3 回、上に 2 回、奥に 2 回進めばよいので、進み方は

$$\frac{7!}{3!2!2!} = 210 \text{ 通り}$$

ある。

(答) 210 通り

(2)

直方体の内部には 2 つの点がある。

このうち、頂点 A に近い方の点を C、頂点 B に近い方の点を D とする。

$$C \text{ を通る進み方は } \frac{3!}{1!1!1!} \cdot \frac{4!}{2!1!1!} = 72 \text{ 通り}$$

$$D \text{ を通る進み方は } \frac{4!}{2!1!1!} \cdot \frac{3!}{1!1!1!} = 72 \text{ 通り}$$

$$C, D \text{ を両方通る進み方は } \frac{3!}{1!1!1!} \cdot \frac{3!}{1!1!1!} = 36 \text{ 通り}$$

あるから、直方体の内部を少なくとも一度は通る進み方は、

$$72 + 72 - 36 = 108 \text{ 通り}$$

ある。

(答) 108 通り

(3)

P, Q, R のうち、少なくとも 1 点を通る進み方を考える。

「A, P, Q, R を含む側面」と「B, P, Q, R を含む側面」のみを通って、頂点 A から頂点 B へ進めばよいので、この進み方は、

$$\frac{7!}{2!5!} = 21 \text{ 通り}$$

ある。したがって、頂点 P, Q, R のいずれも通らない進み方は、(1)の答を用いて

$$210 - 21 = 189 \text{ 通り}$$

ある。

(答) 189 通り

4

(1)

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}f_n(x) &= 1 - x + x^2 - \cdots + (-x)^{n-1} \\ &= \frac{1 - (-x)^n}{1+x}\end{aligned}$$

$$(\text{答}) \quad \frac{d}{dx}f_n(x) = \frac{1 - (-x)^n}{1+x}$$

(2)

$$g_n(x) = f_n(x) - \log(1+x)$$

とおくと,

$$g_n(0) = 0$$

であり,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}g_n(x) &= \frac{d}{dx}f_n(x) - \frac{1}{1+x} \\ &= \frac{1 - (-x)^n}{1+x} - \frac{1}{1+x} \\ &= -\frac{(-x)^n}{1+x}\end{aligned}$$

となる。

[1]  $n$  が偶数のとき

$$\frac{d}{dx}g_n(x) \leq 0 \text{ であるから,}$$

$$g_n(x) \leq g_n(0) = 0 \quad \therefore f_n(x) \leq \log(1+x)$$

となる。

[2]  $n$  が奇数のとき

$$\frac{d}{dx}g_n(x) \geq 0 \text{ であるから,}$$

$$g_n(x) \geq g_n(0) = 0 \quad \therefore f_n(x) \geq \log(1+x)$$

となる。

以上より, 題意は示された。

(証明終)

(3)

$$f_4\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{5} - \frac{1}{50} + \frac{1}{375} - \frac{1}{2500} = 0.1822666\cdots$$

$$f_3\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{5} - \frac{1}{50} + \frac{1}{375} = 0.182666\cdots$$

である。(2)より,

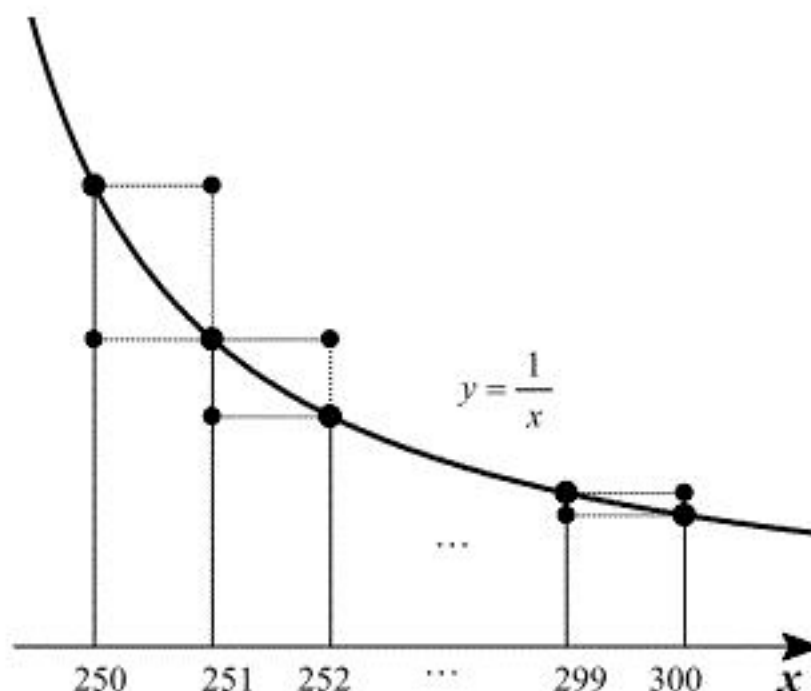
$$f_4\left(\frac{1}{5}\right) \leq \log\left(1 + \frac{1}{5}\right) \leq f_3\left(\frac{1}{5}\right)$$

$$\Leftrightarrow 0.1822666\cdots \leq \log\frac{6}{5} \leq 0.182666\cdots \quad \cdots \textcircled{1}$$

が成り立つから, 求める値は 0.18 である。

(答) 0.18

(4)



グラフより,

$$\int_{250}^{300} \frac{1}{x} dx + \frac{1}{300} \leq \frac{1}{250} + \frac{1}{251} + \cdots + \frac{1}{299} + \frac{1}{300} \leq \frac{1}{250} + \int_{250}^{300} \frac{1}{x} dx$$

$$\Leftrightarrow \log\frac{6}{5} + \frac{1}{300} \leq \frac{1}{250} + \frac{1}{251} + \cdots + \frac{1}{299} + \frac{1}{300} \leq \log\frac{6}{5} + \frac{1}{250}$$

が成り立つ。したがって, ①を用いると

$$0.185 < \log\frac{6}{5} + \frac{1}{300} \leq \frac{1}{250} + \frac{1}{251} + \cdots + \frac{1}{299} + \frac{1}{300} \leq \log\frac{6}{5} + \frac{1}{250} < 0.187$$

であるから, 求める値は 0.19 である。

(答) 0.19