

1.

(1)

$$f'(x) = 3x^2 - 1$$

であるから,

$$\begin{aligned} g(x) &= f'(a)(x-a) + f(a) \\ &= (3a^2 - 1)(x-a) + a^3 - a \\ &= (3a^2 - 1)x - 2a^3 \end{aligned}$$

となる。

$$(答) \ y = g(x) = (3a^2 - 1)x - 2a^3$$

(2)

$f(x) = g(x)$ を解くと,

$$\begin{aligned} x^3 - x &= (3a^2 - 1)x - 2a^3 \\ \Leftrightarrow x^3 - 3a^2x + 2a^3 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-a)^2(x+2a) &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= a, -2a \end{aligned}$$

となるから,

$$b = -2a$$

である。また,

$$f(-2a) = -8a^3 + 2a$$

であるから,

$$B(-2a, -8a^3 + 2a)$$

となる。

$$(答) \ B(-2a, -8a^3 + 2a)$$

(3)

$$\begin{aligned} h(x) &= f(x) - g(x) \\ &= (x^3 - x) - \{(3a^2 - 1)x - 2a^3\} \\ &= x^3 - 3a^2x + 2a^3 \end{aligned}$$

とおくと,

$$h'(x) = 3x^2 - 3a^2 = 3(x+a)(x-a)$$

であるから, $x \leq 2a$ における $h(x)$ の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	$-a$	$\cdots$	a	$\cdots$	$2a$
$h'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$\nearrow$	$4a^3$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$4a^3$

増減表より, $h(x) = f(x) - g(x)$ の最大値は $4a^3$ ($x = 2a, -a$ のとき) である。

$$(答) \ 最大値 4a^3 \ (x = 2a, -a \text{ のとき})$$

2.

(1)

線分 AB の中点を M とすると、M は平面 H 上の点である。平面 H 上の点で、M 以外の任意の点を D とすると、

$$AD = BD$$

が成り立つから、 $\triangle ABD$ は二等辺三角形である。したがって、

$$DM \perp AB$$

が成り立つから、

$$AB \perp \text{平面 H}$$

であることが示された。

(証明終)

(2)

(1)より、 $OC \parallel AB$ であるから、 k を実数として、

$$\overrightarrow{OC} = k\overrightarrow{AB} = (-2k, 3k, 0)$$

と表せる。ここで、C は平面 H 上にあるから、

$$AC^2 = BC^2$$

$$\Leftrightarrow (-2k-2)^2 + (3k)^2 + 0^2 = (-2k)^2 + (3k-3)^2 + 0^2$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{5}{26}$$

となる。したがって、

$$C\left(-\frac{5}{13}, \frac{15}{26}, 0\right)$$

である。

$$(\text{答}) \ C\left(-\frac{5}{13}, \frac{15}{26}, 0\right)$$

(3)

(2)より、

$$OC^2 = \left(-\frac{5}{13}\right)^2 + \left(\frac{15}{26}\right)^2 = \frac{25}{52}$$

である。ここで、 $OP \leq d$ のとき、

$$OP^2 \leq d^2$$

$$\Leftrightarrow OC^2 + CP^2 \leq d^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{25}{52} + CP^2 \leq d^2$$

$$\Leftrightarrow CP^2 \leq d^2 - \frac{25}{52} \quad \dots \textcircled{1}$$

が成り立つ。

$$[1] \ d^2 - \frac{25}{52} < 0 \Leftrightarrow (0 <) d < \frac{5\sqrt{13}}{26} \text{ のとき}$$

①を満たす点 P は存在しないから、求める面積は 0 である。

$$[2] \ d^2 - \frac{25}{52} \geq 0 \Leftrightarrow d \geq \frac{5\sqrt{13}}{26} \text{ のとき}$$

①を満たす点 P の領域は、半径 $\sqrt{d^2 - \frac{25}{52}}$ の円であるから、

求める面積は $\left(d^2 - \frac{25}{52}\right)\pi$ である。

$$(\text{答}) \ 0 < d < \frac{5\sqrt{13}}{26} \text{ のとき } 0, \ d \geq \frac{5\sqrt{13}}{26} \text{ のとき } \left(d^2 - \frac{25}{52}\right)\pi$$

3.

(1)

A グループとして 9 枚から 3 枚選び, B グループとして残り 6 枚から 4 枚選べばよいから,

$${}_9C_3 \cdot {}_6C_4 = 84 \cdot 15 = 1260 \text{ (通り)}$$

ある。

(答) 1260 通り

(2)

A グループの数字がすべて 4 以下になる選び方を考える。A グループとして 1, 2, 3, 4 のカードから 3 枚選び, B グループとして残り 6 枚から 4 枚選べばよいから, A グループの数字がすべて 4 以下になる選び方は,

$${}_4C_3 \cdot {}_6C_4 = 4 \cdot 15 = 60 \text{ (通り)}$$

ある。したがって, 求める確率は,

$$\frac{60}{1260} = \frac{1}{21}$$

である。

(答) $\frac{1}{21}$

(3)

A グループの最大数が B グループの最小数より小さい場合を考える。A グループの最大数は 3 以上であり, B グループの最小数は 6 以下であるから, B グループの最小数の候補は 4, 5, 6 である。

[1] B グループの最小数が 6 のとき

A グループとして 1, 2, 3, 4, 5 の中から 3 枚選び, B グループとして 6, 7, 8, 9 を選べばよい。A グループのとりうる数字の組み合わせは, 次の通りである。

$$(1, 2, 3), (1, 2, 4), (1, 2, 5), (1, 3, 4), (1, 3, 5), \\ (1, 4, 5), (2, 3, 4), (2, 3, 5), (2, 4, 5), (3, 4, 5)$$

[2] B グループの最小数が 5 のとき

A グループとしての 1, 2, 3, 4 中から 3 枚選び, B グループとして 5 を選び, さらに 6, 7, 8, 9 の中から 3 枚選べばよい。A グループのとりうる数字の組み合わせは, 次の通りである。

$$(1, 2, 3), (1, 2, 4), (1, 3, 4), (2, 3, 4)$$

また, B グループの選び方は,

$${}_4C_3 = 4 \text{ (通り)}$$

ある。

[3] B グループの最小数が 4 のとき

A グループとして 1, 2, 3 を選び, B グループとして 4 を選び, さらに 5, 6, 7, 8, 9 の中から 3 枚選べばよい。B グループの選び方は,

$${}_5C_3 = 10 \text{ (通り)}$$

ある。

以上[1], [2], [3]より, 求める期待値は

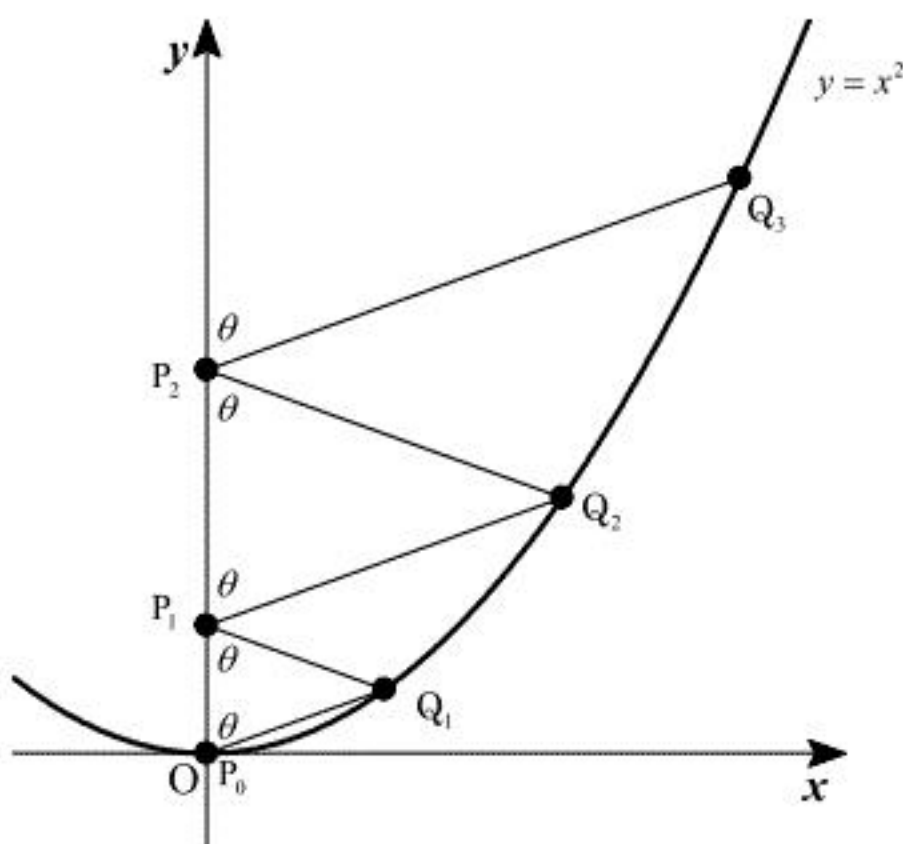
$$\begin{aligned} & (1+2+3+4+5) \cdot 6 \cdot \frac{1}{1260} \\ & + (1+2+3+4) \cdot 3 \cdot \frac{4}{1260} + (1+2+3) \cdot \frac{10}{1260} \\ & = \frac{90+120+60}{1260} \\ & = \frac{270}{1260} \\ & = \frac{3}{14} \end{aligned}$$

である。

(答) $\frac{3}{14}$

4.

(1)



与えられた条件より、 $\triangle Q_k P_{k-1} P_k$ は二等辺三角形である。ここで、直線 $P_{k-1} Q_k$ の傾きは、

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{1}{\tan \theta} = t$$

であり、直線 $P_k Q_k$ の傾きは、

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \frac{-1}{\tan \theta} = -t$$

である。よって、

$$P_k(0, y_k), Q_k(x_k, x_k^2) \quad (x_k > 0, y_k \geq 0)$$

とおくと、

$$t = \frac{x_k^2 - y_{k-1}}{x_k} \Leftrightarrow x_k^2 - tx_k - y_{k-1} = 0$$

$$-t = \frac{x_k^2 - y_k}{x_k} \Leftrightarrow y_k = x_k^2 + tx_k$$

が成り立つから、

$$\begin{cases} x_1^2 - tx_1 - y_0 = 0 \\ y_1 = x_1^2 + tx_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = t \\ y_1 = 2t^2 \end{cases} \quad (\because y_0 = 0)$$

$$\begin{cases} x_2^2 - tx_2 - y_1 = 0 \\ y_2 = x_2^2 + tx_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 2t \\ y_2 = 6t^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3^2 - tx_3 - y_2 = 0 \\ y_3 = x_3^2 + tx_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = 3t \\ y_3 = 12t^2 \end{cases}$$

である。したがって、

$$P_1(0, 2t^2), P_2(0, 6t^2), P_3(0, 12t^2)$$

となる。

$$(\text{答}) \quad P_1(0, 2t^2), P_2(0, 6t^2), P_3(0, 12t^2)$$

(2)

(1)より、 $x_n^2 - tx_n - y_{n-1} = 0$ が成り立つから、

$$x_{n+1}^2 - tx_{n+1} - y_n = 0$$

$$\Leftrightarrow y_n = x_{n+1}^2 - tx_{n+1}$$

を得る。

$$(\text{答}) \quad y_n = x_{n+1}^2 - tx_{n+1}$$

(3)

(1)より、 $P_n(0, n(n+1)t^2)$ と推測できる。これを数学的帰納法で証明する。

[1] $n=1$ のとき

$P_1(0, 1 \cdot 2t^2)$ であるから、確かに成り立つ。

[2] $n=k$ のときに成り立つと仮定すると、

$$y_k = k(k+1)t^2$$

が成り立つ。このとき、(2)より、

$$x_{k+1}^2 - tx_{k+1} - y_k = 0$$

$$\Leftrightarrow x_{k+1}^2 - tx_{k+1} - k(k+1)t^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x_{k+1} + kt)\{x_{k+1} - (k+1)t\} = 0$$

$$\therefore x_{k+1} = (k+1)t$$

となるから、

$$y_{k+1} = x_{k+1}^2 + tx_{k+1}$$

$$= (k+1)^2 t^2 + (k+1)t^2$$

$$= (k+1)(k+2)t^2$$

である。したがって、 $n=k+1$ のときも成り立つ。

以上[1], [2]より、 $P_n(0, n(n+1)t^2)$ となることが示された。

(証明終)