

$x=0$ は、与えられた方程式の解ではないので、

$$2x \sin x - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x = \frac{3}{2x}$$

と変形できる。よって、求める解の個数は、 $-\pi \leq x < 0$, $0 < x \leq \pi$ の範囲で、 $y = \sin x$ のグラ

フと $y = \frac{3}{2x}$ のグラフが持つ交点の個数に等しい。

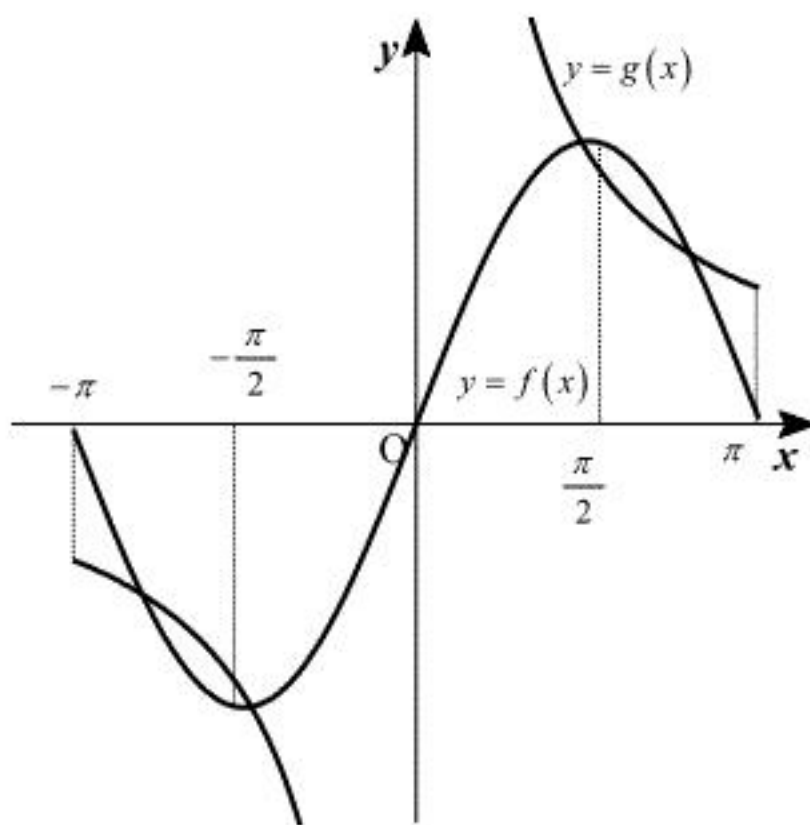
$$f(x) = \sin x, \quad g(x) = \frac{3}{2x}$$

とおくと、

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) - g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 - \frac{3}{\pi} = \frac{\pi-3}{\pi} > 0$$

$$\Leftrightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right) > g\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

である。 $f(x)$ と $g(x)$ は共に奇関数であることに注意すると、グラフは次のようになる。



グラフより、交点の個数は4個なので、求める解の個数は4個である。

(1)

行列 A が逆行列を持つと仮定する。

$A^k = O$ の両辺に $(A^{-1})^k$ を左からかけると、

$$(A^{-1})^k A^k = O \Leftrightarrow E = O$$

となり、矛盾する。

したがって、仮定が誤りであり、行列 A は逆行列を持たないことが示された。

(証明終)

(2)

行列 A は逆行列を持たないので、

$$\det A = 0 \Leftrightarrow ad - bc = 0$$

である。また、ケーリー・ハミルトンの定理より、

$$\begin{aligned} A^2 - (a+d)A + (ad-bc)E &= O \\ \Leftrightarrow A^2 &= (a+d)A \quad \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

が成り立つから、これを繰り返し用いると

$$\begin{aligned} A^k &= A^{k-2} A^2 \\ &= (a+d) A^{k-1} \\ &= \cdots \\ &= (a+d)^{k-1} A \\ &= O \end{aligned}$$

となる。ここで、 $b \neq 0$ より、 $A \neq O$ であるから、

$$a+d=0$$

である。これを①に代入して、

$$A^2 = O$$

となることが示された。

(証明終)

(3)

$$\begin{cases} ad-bc=0 \\ a+d=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=-\frac{a^2}{b} \\ d=-a \end{cases}$$

であるから、

$$\begin{aligned} \det(A-pE) &= \det \begin{pmatrix} a-p & b \\ -\frac{a^2}{b} & -a-p \end{pmatrix} \\ &= (a-p)(-a-p) - b \cdot \left(-\frac{a^2}{b}\right) \\ &= p^2 \neq 0 \end{aligned}$$

である。したがって、 $A-pE$ は逆行列を持ち、

$$(A-pE)^{-1} = \frac{1}{p^2} \begin{pmatrix} -a-p & -b \\ \frac{a^2}{b} & a-p \end{pmatrix}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad \frac{1}{p^2} \begin{pmatrix} -a-p & -b \\ \frac{a^2}{b} & a-p \end{pmatrix}$$

3

(1)

与えられた方程式に $x=2$ を代入すると、

$$x^2 - xy - 4x + 2y + 3 = 4 - 2y - 8 + 2y + 3 = -1 \neq 0$$

であるから、 $x \neq 2$ として良い。したがって、

$$\begin{aligned} x^2 - xy - 4x + 2y + 3 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-2)y &= x^2 - 4x + 3 \\ \Leftrightarrow y &= \frac{x^2 - 4x + 3}{x-2} = x - 2 - \frac{1}{x-2} \end{aligned}$$

であり、

$$\begin{aligned} y' &= 1 + \frac{1}{(x-2)^2} > 0 \\ y'' &= \frac{-2}{(x-2)^3} \end{aligned}$$

である。また、

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \{y - (x-2)\} &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(-\frac{1}{x-2} \right) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 2-0} y &= +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2+0} y &= -\infty \end{aligned}$$

であるから、

$$y = x - 2, x = 2$$

が漸近線であり、増減表は次のようになる。

x	$(-\infty)$	$\cdots$	2	$\cdots$	$(+\infty)$
y'		+	$\times$	+	
y''		+	$\times$	-	
y	$(-\infty)$	$\nearrow$	$\times$	$\nearrow$	$(+\infty)$

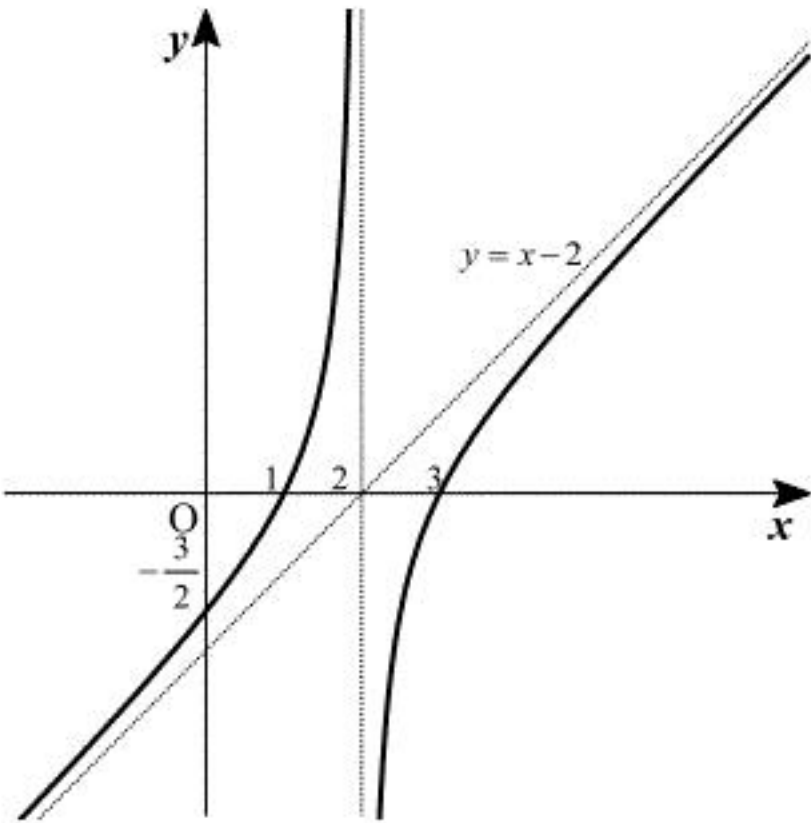
また、 $x=0$ のとき

$$y = \frac{x^2 - 4x + 3}{x-2} = -\frac{3}{2}$$

であり、 $y=0$ のとき

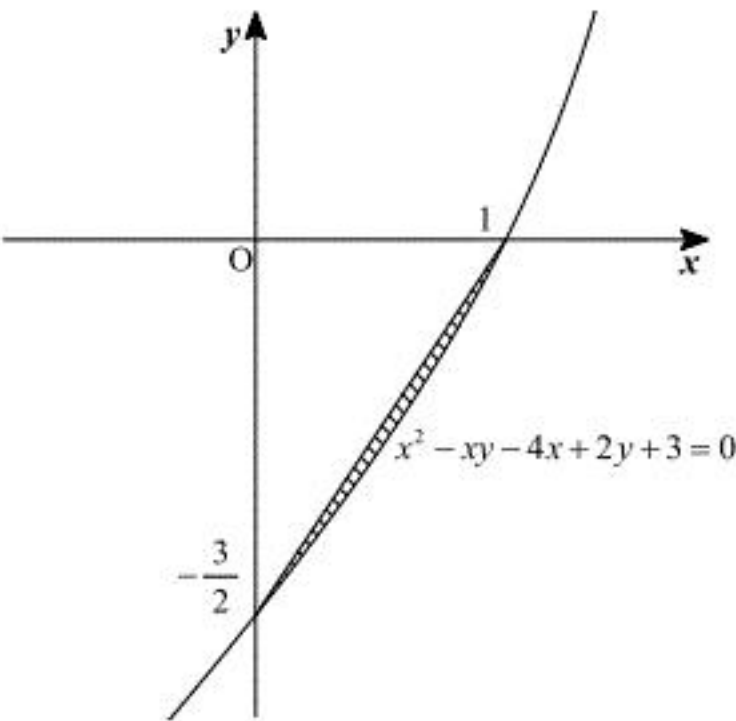
$$\frac{x^2 - 4x + 3}{x-2} = 0 \Leftrightarrow \frac{(x-1)(x-3)}{x-2} = 0 \Leftrightarrow x = 1, 3$$

である。以上より、求める曲線の概形は次図のようになる。



(答) 前図

(2)



求めるのは、上図斜線部の面積であるから

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \left\{ -\left(x - 2 - \frac{1}{x-2} \right) \right\} dx - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{3}{2} \\ &= \left[-\frac{1}{2}x^2 + 2x + \log|x-2| \right]_0^1 - \frac{3}{4} \\ &= \frac{3}{2} - \log 2 - \frac{3}{4} \\ &= \frac{3}{4} - \log 2 \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{3}{4} - \log 2$

(1)

線分 AB の中点を M とすると、 M は平面 H 上の点である。

平面 H 上の点で、 M 以外の任意の点を D とすると、

$$AD = BD$$

が成り立つから、 $\triangle ABD$ は二等辺三角形である。したがって、

$$DM \perp AB$$

が成り立つから、

$$AB \perp \text{平面 } H$$

であることが示された。

(証明終)

(2)

(1)より $OC \parallel AB$ であるから、 k を実数として、

$$\overrightarrow{OC} = k\overrightarrow{AB} = (-2k, 3k, 0)$$

と表せる。 C は平面 H 上にあるので、

$$AC^2 = BC^2$$

$$\Leftrightarrow (-2k-2)^2 + (3k)^2 + 0^2 = (-2k)^2 + (3k-3)^2 + 0^2$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{5}{26}$$

となるから、

$$C\left(-\frac{5}{13}, \frac{15}{26}, 0\right)$$

である。

$$(\text{答}) \quad C\left(-\frac{5}{13}, \frac{15}{26}, 0\right)$$

(3)

(2)より、

$$OC^2 = \left(-\frac{5}{13}\right)^2 + \left(\frac{15}{26}\right)^2 = \frac{25}{52}$$

である。ここで、 $OP \leq d$ のとき、

$$OP^2 \leq d^2$$

$$\Leftrightarrow OC^2 + CP^2 \leq d^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{25}{52} + CP^2 \leq d^2$$

$$\Leftrightarrow CP^2 \leq d^2 - \frac{25}{52} \quad \cdots \textcircled{1}$$

が成り立つ。

$$[1] \quad d^2 - \frac{25}{52} < 0 \Leftrightarrow (0 <) d < \frac{5\sqrt{13}}{26} \text{ のとき}$$

①を満たす点 P は存在しないので、求める面積は 0 である。

$$[2] \quad d^2 - \frac{25}{52} \geq 0 \Leftrightarrow d \geq \frac{5\sqrt{13}}{26} \text{ のとき}$$

①を満たす点 P の領域は、半径 $\sqrt{d^2 - \frac{25}{52}}$ の円であるから、

求める面積は $\left(d^2 - \frac{25}{52}\right)\pi$ である。

$$(\text{答}) \quad \begin{cases} 0 < d < \frac{5\sqrt{13}}{26} \text{ のとき } 0 \\ d \geq \frac{5\sqrt{13}}{26} \text{ のとき } \left(d^2 - \frac{25}{52}\right)\pi \end{cases}$$