

(1)

1回じゃんけんをして、Aが勝つ確率は $\frac{1}{3}$ 、Bが勝つ確率は $\frac{1}{3}$ 、あいこの確率は $\frac{1}{3}$ である。

k 回目にAが勝つのは、 $k-1$ 回連続であいこになった後にAが勝つ場合なので、その確率は

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{3} = \left(\frac{1}{3}\right)^k$$

である。よって、 n 回目までにAが勝つ確率は

$$\frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{3} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3^n}\right)$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3^n}\right)$$

(2)

1回じゃんけんをして、Aだけが勝つ確率は $\frac{1}{9}$ 、Aともう1人が勝つ確率は $\frac{2}{9}$ 、あいこの確率は $\frac{1}{3}$ 、Aが負ける確率は $\frac{1}{3}$ である。

[1] $k-1$ 回目($1 \leq k \leq n$)まであいこで、 k 回目にAだけが勝つとき

このようになる確率は、

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{3^{k+1}}$$

である。

[2] $i-1$ 回目($1 \leq i \leq n-1$)まであいこで、 i 回目にAともう1人が勝ち、その後Aが勝つとき

(1)の結果を利用すると、このようになる確率は、

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{i-1} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3^{n-i}}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^{i+1} - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$$

である。

以上[1], [2]より、Aひとりが勝ち残る確率は、

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{3^{k+1}} + \sum_{i=1}^{n-1} \left\{ \left(\frac{1}{3}\right)^{i+1} - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} \right\} &= \frac{1}{9} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 - \frac{1}{3}} + \frac{1}{9} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}}{1 - \frac{1}{3}} - (n-1) \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} \\ &= \frac{1}{6} \left(1 - \frac{1}{3^n}\right) + \frac{1}{6} \left(1 - \frac{1}{3^{n-1}}\right) - (n-1) \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} \\ &= \frac{1}{3} \left(1 - \frac{n+1}{3^n}\right) \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{3} \left(1 - \frac{n+1}{3^n}\right)$$

2

(1)

点 $Q(X, Y)$ とし、線分 OP と x 軸の正方向のなす角を $\theta (0 \leq \theta < 2\pi)$ とすると、

$$\begin{aligned}(X, Y) &= \overrightarrow{OQ} \\ &= \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ} \\ &= (\cos \theta, \sin \theta) + (r \cos(-\theta), r \sin(-\theta)) \\ &= ((1+r) \cos \theta, (1-r) \sin \theta)\end{aligned}$$

である。

[1] $r=1$ のとき

$$(X, Y) = (2 \cos \theta, 0) \text{ である。}$$

[2] $r \neq 1$ のとき

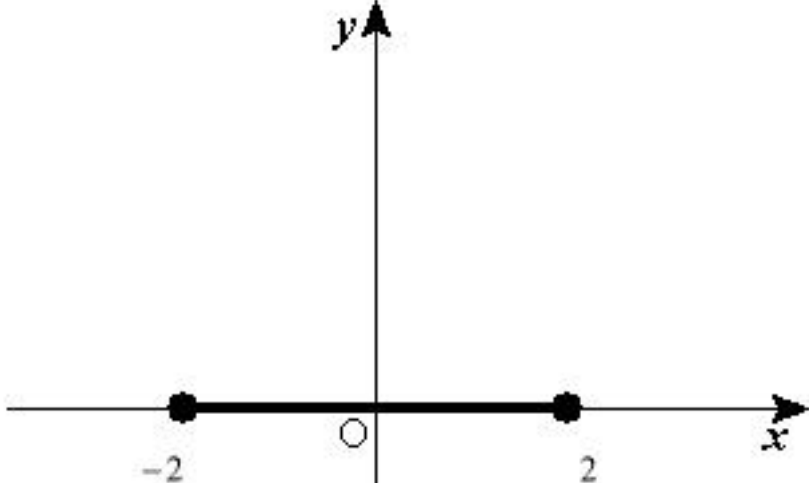
$$\cos \theta = \frac{X}{1+r}, \sin \theta = \frac{Y}{1-r} \text{ であるから、} \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1 \text{ に代入して}$$

$$\left(\frac{X}{1+r}\right)^2 + \left(\frac{Y}{1-r}\right)^2 = 1$$

が成り立つ。

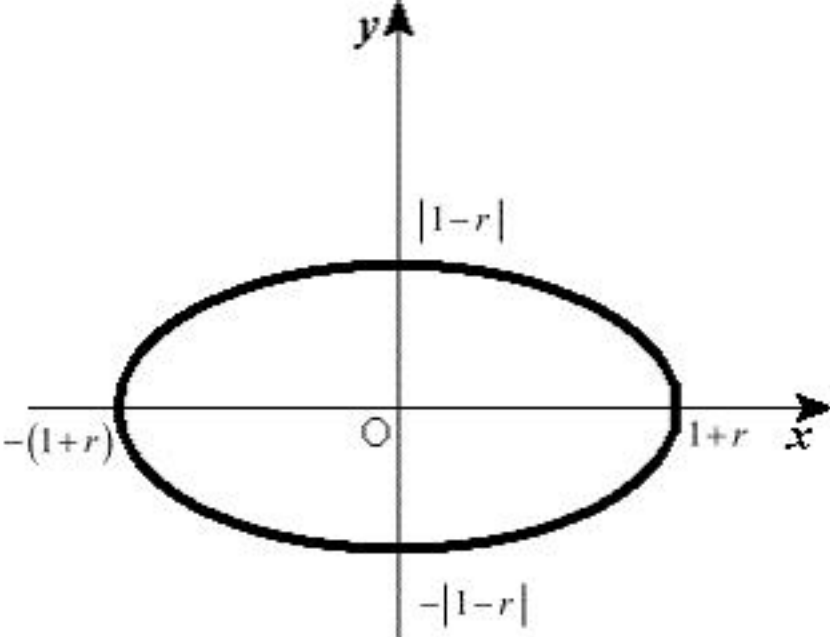
以上[1], [2]より、点 Q の軌跡は次図のようになる。

$r=1$ のとき、 $(-2, 0), (2, 0)$ を結ぶ線分



(答)

$r \neq 1$ のとき、楕円



(答)

(2)

[1] $r=1$ のとき

$$V = 0$$

となる。

[2] $r \neq 1$ のとき

$$\begin{aligned}V &= \int_{-|1-r|}^{|1-r|} \pi X^2 dY \\ &= \left| \pi \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} (1+r)^2 \cos^2 \theta \cdot (1-r) \cos \theta d\theta \right| \\ &= \left| \pi (1+r)^2 (1-r) \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} (1 - \sin^2 \theta) \cos \theta d\theta \right| \\ &= \left| \pi (1+r)^2 (1-r) \left[\sin \theta - \frac{1}{3} \sin^3 \theta \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \right| \\ &= \frac{4\pi}{3} (1+r)^2 |1-r|\end{aligned}$$

となる。(これは $r=1$ のときも成り立つ)

以上[1], [2]より、

$$V = \frac{4\pi}{3} (1+r)^2 |1-r|$$

である。次に、グラフの概形を考える。

[a] $0 < r < 1$ のとき

$$V = \frac{4\pi}{3} (1+r)^2 (1-r)$$

であるから、

$$\frac{dV}{dr} = \frac{4\pi}{3} \left\{ 2(1+r)(1-r) - (1+r)^2 \right\} = \frac{4\pi}{3} (1+r)(1-3r)$$

となる。よって、 V の増減表は次のようになる。

r	0	...	$\frac{1}{3}$	...	1
$\frac{dV}{dr}$		+	0	-	
V	$\left(\frac{4}{3}\pi\right)$	$\nearrow$	$\frac{128}{81}\pi$	$\searrow$	(0)

[b] $r \geq 1$ のとき

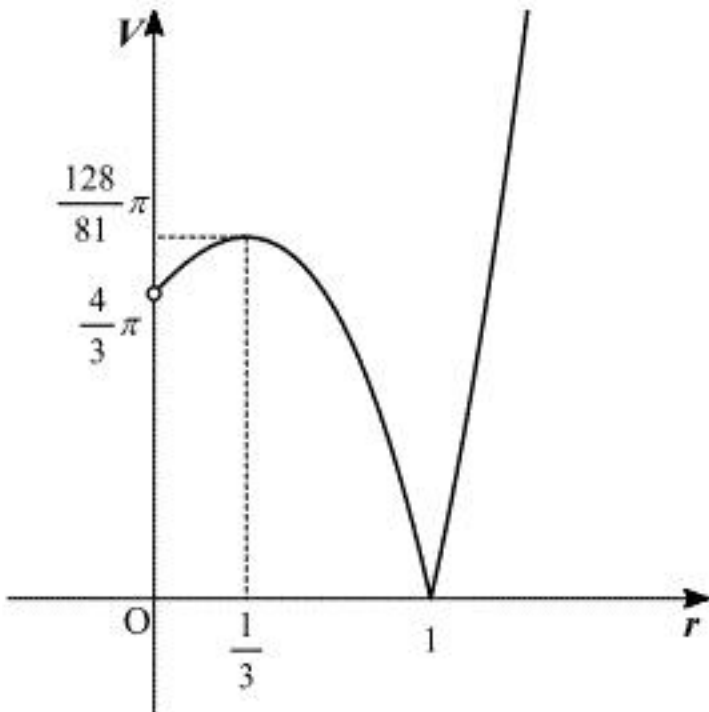
$$V = \frac{4\pi}{3} (1+r)^2 (r-1)$$

であるから、

$$\frac{dV}{dr} = \frac{4\pi}{3} (1+r)(3r-1) > 0$$

となり、 $r \geq 1$ において V は単調増加する。

以上[a], [b]より、グラフの概形は次図のようになる。



(答) $V = \frac{4\pi}{3} (1+r)^2 |1-r|$

3

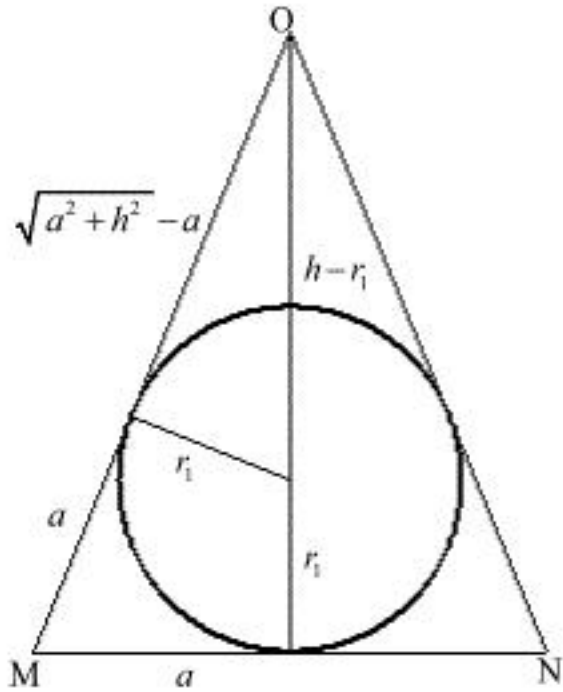
(1)

辺 AB, CD の中点をそれぞれ M, N とすると,

$$OM = ON = \sqrt{a^2 + h^2}$$

である。

点 O, M, N を含む平面で正四角錐を切ると, 断面は次のような二等辺三角形になる。



したがって, 三平方の定理より,

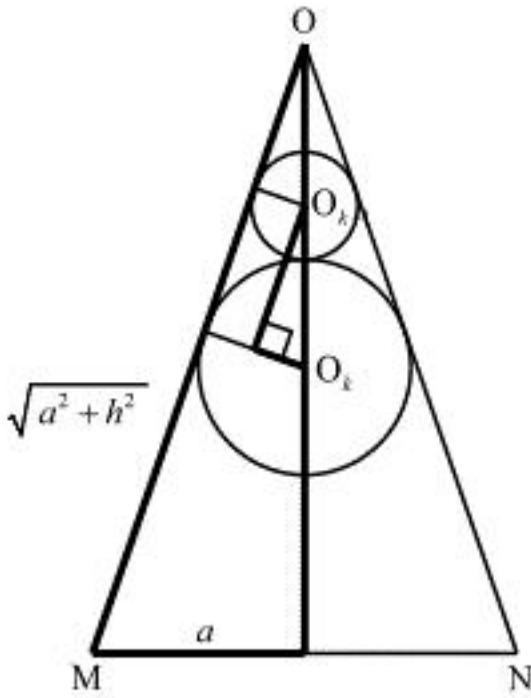
$$\begin{aligned} r_1^2 + \left(\sqrt{a^2 + h^2} - a\right)^2 &= (h - r_1)^2 \\ \Leftrightarrow r_1 &= \frac{a}{h} \left(\sqrt{a^2 + h^2} - a\right) \end{aligned}$$

を得る。

$$(\text{答}) \quad r_1 = \frac{a}{h} \left(\sqrt{a^2 + h^2} - a\right)$$

(2)

球 Q_k の中心を O_k とおく。



前図において, 太線で囲まれた三角形が相似の関係にあることを用いると,

$$\begin{aligned} \sqrt{a^2 + h^2} : a &= (r_k + r_{k+1}) : (r_k - r_{k+1}) \\ \Leftrightarrow a(r_k + r_{k+1}) &= \sqrt{a^2 + h^2} (r_k - r_{k+1}) \\ \Leftrightarrow r_{k+1} &= \frac{\sqrt{a^2 + h^2} - a}{\sqrt{a^2 + h^2} + a} r_k = \left(\frac{\sqrt{a^2 + h^2} - a}{h}\right)^2 r_k \end{aligned}$$

を得る。

$$(\text{答}) \quad r_{k+1} = \left(\frac{\sqrt{a^2 + h^2} - a}{h}\right)^2 r_k$$

(3)

(1), (2)の答を用いると,

$$r_n = r_1 \left(\frac{\sqrt{a^2 + h^2} - a}{h}\right)^{2n-2} = a \left(\frac{\sqrt{a^2 + h^2} - a}{h}\right)^{2n-1}$$

となるから, 球 Q_n の体積を V_n とすると

$$V_n = \frac{4\pi}{3} r_n^3 = \frac{4\pi a^3}{3} \left(\frac{\sqrt{a^2 + h^2} - a}{h}\right)^{6n-3}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{4\pi a^3}{3} \left(\frac{\sqrt{a^2 + h^2} - a}{h}\right)^{6n-3}$$

(4)

$h = 2\sqrt{2}a$ のとき,

$$\begin{aligned} V_k &= \frac{4\pi a^3}{3} \left(\frac{\sqrt{a^2 + 8a^2} - a}{2\sqrt{2}a}\right)^{6k-3} \\ &= \frac{4\pi a^3}{3} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{6k-3} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{3} \pi a^3 \left(\frac{1}{8}\right)^{k-1} \end{aligned}$$

であるから, 求める和は

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n V_k &= \frac{\sqrt{2}}{3} \pi a^3 \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{8}\right)^{k-1} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{3} \pi a^3 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{8}\right)^n}{1 - \frac{1}{8}} \\ &= \frac{8\sqrt{2}}{21} \left(1 - \frac{1}{8^n}\right) \pi a^3 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{8\sqrt{2}}{21} \left(1 - \frac{1}{8^n}\right) \pi a^3$$