

1.

(1)

物体 A が  $y$  軸に達するには 5 または 6 の目が

$$90 \div 15 = 6 \text{ (回)}$$

出なければならない。したがって、点  $(0, n)$  に到達するには、

はじめの  $n+4$  回で、1 から 4 の目が  $n-1$  回、5 または 6 の目が 5 回、

最後の 1 回で、5 または 6 の目、

が出ればよい。したがって、

$$\begin{aligned} P_n &= {}_{n+4}C_5 \left(\frac{4}{6}\right)^{n-1} \left(\frac{2}{6}\right)^5 \cdot \frac{2}{6} \\ &= \frac{(n+4)!}{(n-1)!5!} \cdot \frac{2^{n-1}}{3^{n+5}} \end{aligned}$$

である。

(答)  $\frac{(n+4)!}{(n-1)!5!} \cdot \frac{2^{n-1}}{3^{n+5}}$

(2)

$$\frac{P_{n+1}}{P_n} = \frac{2(n+5)}{3n}$$

であるから、

$$\frac{P_{n+1}}{P_n} \geq 1 \Leftrightarrow n \leq 10$$

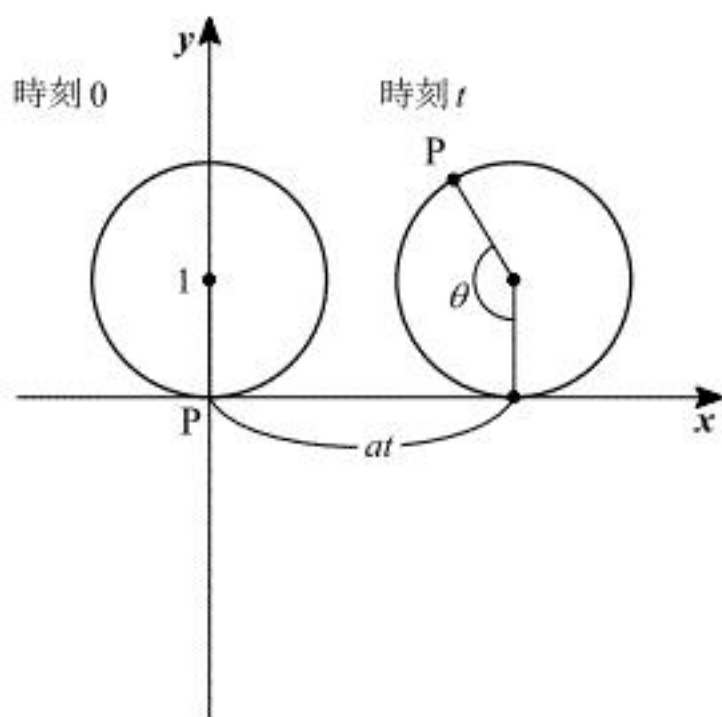
となるので、

$$P_1 \leq \dots \leq P_9 \leq P_{10} = P_{11} \geq P_{12} \geq \dots$$

となる。よって  $P_n$  を最大にする  $n$  は 10, 11 である。

(答) 10, 11

2.



(1)

上図のように座標を設定する。進んだ距離  $at$  と半径 1, 中心角  $\theta$  の扇形の弧の長さが等しいことから,

$$\theta = at$$

である。したがって、時刻  $t$  における点 P の位置ベクトル  $\vec{x}(t)$  は,

$$\begin{aligned}\vec{x}(t) &= \begin{pmatrix} at \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos\left(-\theta - \frac{\pi}{2}\right) \\ \sin\left(-\theta - \frac{\pi}{2}\right) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} at - \sin at \\ 1 - \cos at \end{pmatrix}\end{aligned}$$

となる。したがって,

$$\begin{aligned}\vec{v}(t) &= \begin{pmatrix} a - a \cos at \\ a \sin at \end{pmatrix}, \\ |\vec{v}(t)|^2 &= (a - a \cos at)^2 + (a \sin at)^2 \\ &= 2a^2 (1 - \cos at) \\ &= 2a^2 \left\{ 1 - \left( 1 - 2 \sin^2 \frac{at}{2} \right) \right\} \\ &= 4a^2 \sin^2 \frac{at}{2}\end{aligned}$$

となり,

$$|\vec{v}(t)| = 2a \left| \sin \frac{at}{2} \right|$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad 2a \left| \sin \frac{at}{2} \right|$$

(2)

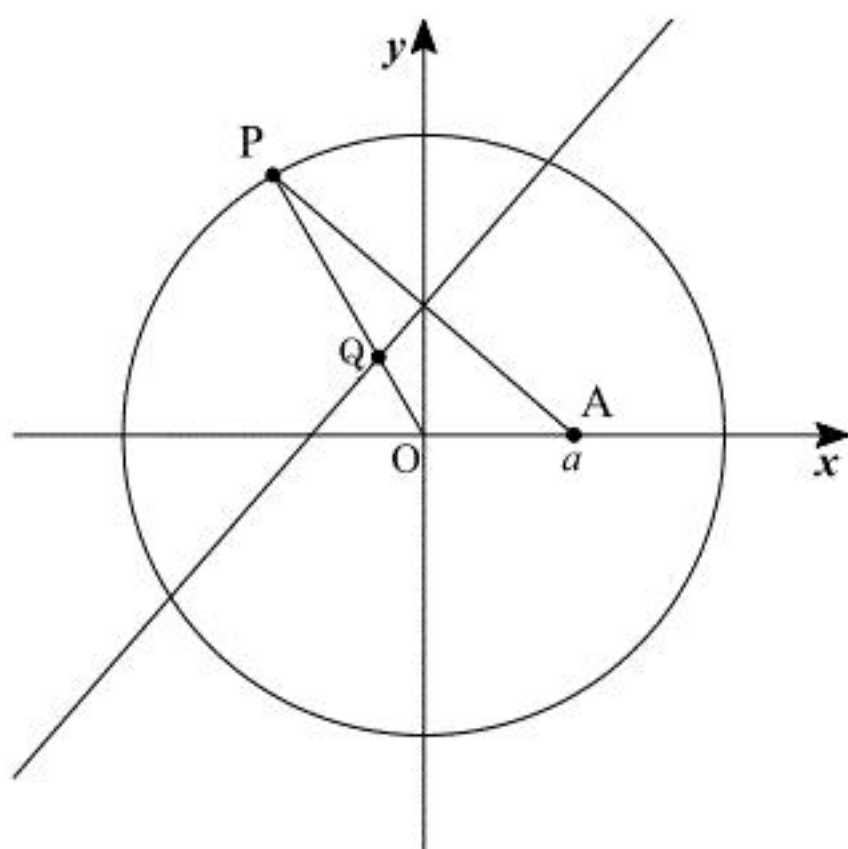
$0 \leq t \leq \frac{2\pi}{a}$  において,  $\left| \sin \frac{at}{2} \right| = \sin \frac{at}{2}$  であるから,

$$\begin{aligned}& \int_0^{\frac{2\pi}{a}} |\vec{v}(t)| dt \\ &= \int_0^{\frac{2\pi}{a}} 2a \sin \frac{at}{2} dt \\ &= \left[ -4 \cos \frac{at}{2} \right]_0^{\frac{2\pi}{a}} \\ &= 8\end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad 8$$

**3.**



上図のように、 $A(a, 0) (0 \leq a < r)$ ,  $P(r \cos \theta, r \sin \theta) (0 \leq \theta < 2\pi)$  において一般性を失わない。垂直二等分線の性質より、 $AQ = PQ$  である。 $Q(t \cos \theta, t \sin \theta) (t \text{ は実数})$  とおけるので、

$$\begin{aligned}AQ^2 &= PQ^2 \\ \Leftrightarrow (t \cos \theta - a)^2 + t^2 \sin^2 \theta &= (r - t)^2 \\ \Leftrightarrow -2at \cos \theta + a^2 &= r^2 - 2rt\end{aligned}$$

となる。 $Q(x, y)$  とおくと,  $t \cos \theta = x, t = \sqrt{x^2 + y^2}$  であるので,

$$\Leftrightarrow 2r\sqrt{x^2+y^2} = 2ax+r^2-a^2 \quad \cdot \cdot \cdot \textcircled{1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(x - \frac{a}{2}\right)^2}{\left(\frac{r}{2}\right)^2} + \frac{y^2}{\frac{r^2 - a^2}{4}} = 1 \quad \dots \textcircled{2}$$

となる。逆に、②上の任意の点

$$(x, y) = \left( \frac{a}{2} + \frac{r}{2} \cos \phi, \frac{\sqrt{r^2 - a^2}}{2} \sin \phi \right)$$

は①式を満たす。したがって点Qが描く軌跡は、点Oと点Aが一致していないとき、

$$\text{橢圓} \frac{\left(x - \frac{\text{OA}}{2}\right)^2}{\left(\frac{r}{2}\right)^2} + \frac{y^2}{\frac{r^2 - \text{OA}^2}{4}} = 1$$

である。ただし、点Oと点Aが一致しているときは、

$$\textcircled{D} \quad x^2 + y^2 = \frac{r^2}{4}$$

である。

(答) 
$$\left\{ \begin{array}{l} \text{楕円} \frac{\left(x - \frac{OA}{2}\right)^2}{\left(\frac{r}{2}\right)^2} + \frac{y^2}{\frac{r^2 - OA^2}{4}} = 1 \quad (\text{点Oと点Aが一致していないとき}) \\ \text{円} x^2 + y^2 = \frac{r^2}{4} \quad (\text{点Oと点Aが一致しているとき}) \end{array} \right.$$

(1)

$$\begin{aligned}
 f_2(x) &= \int_0^x t(x-t) dt \\
 &= \left[ \frac{x}{2} t^2 - \frac{t^3}{3} \right]_0^x \\
 &= \frac{x^3}{6} \\
 f_3(x) &= \int_0^x t \cdot \frac{(x-t)^2}{6} dt \\
 &= \left[ -\frac{(x-t)^4}{24} \cdot t \right]_0^x + \int_0^x \frac{(x-t)^4}{24} dt \\
 &= \left[ -\frac{(x-t)^5}{120} \right]_0^x \\
 &= \frac{x^5}{120}
 \end{aligned}$$

である。

$$(答) \quad f_2(x) = \frac{x^3}{6}, \quad f_3(x) = \frac{x^5}{120}$$

(2)

$f_n(x) = \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$ であることを数学的帰納法により証明する。

[1]  $n=1$  のとき

$$f_1(x) = \frac{x}{1!} = x$$

であるので、成り立つ。

[2]  $n=k$  ( $k$  は自然数) のとき

$$f_k(x) = \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}$$

が成り立つと仮定すると、 $n=k+1$  のとき

$$\begin{aligned}
 f_{k+1}(x) &= \int_0^x t \cdot \frac{(x-t)^{2k-1}}{(2k-1)!} dt \\
 &= \left[ -\frac{(x-t)^{2k}}{(2k)!} \cdot t \right]_0^x + \int_0^x \frac{(x-t)^{2k}}{(2k)!} dt \\
 &= \left[ -\frac{(x-t)^{2k+1}}{(2k+1)!} \right]_0^x \\
 &= \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}
 \end{aligned}$$

となるので、 $n=k+1$  のときも成り立つ。

以上, [1], [2] より,  $f_n(x) = \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$  であることが示された。

(証明終)