

1.

(1)

$y' = 2x$ であるから、直線 ℓ の傾きを m とすると、

$$\begin{aligned} 2a \cdot m &= -1 \\ \therefore m &= -\frac{1}{2a} \end{aligned}$$

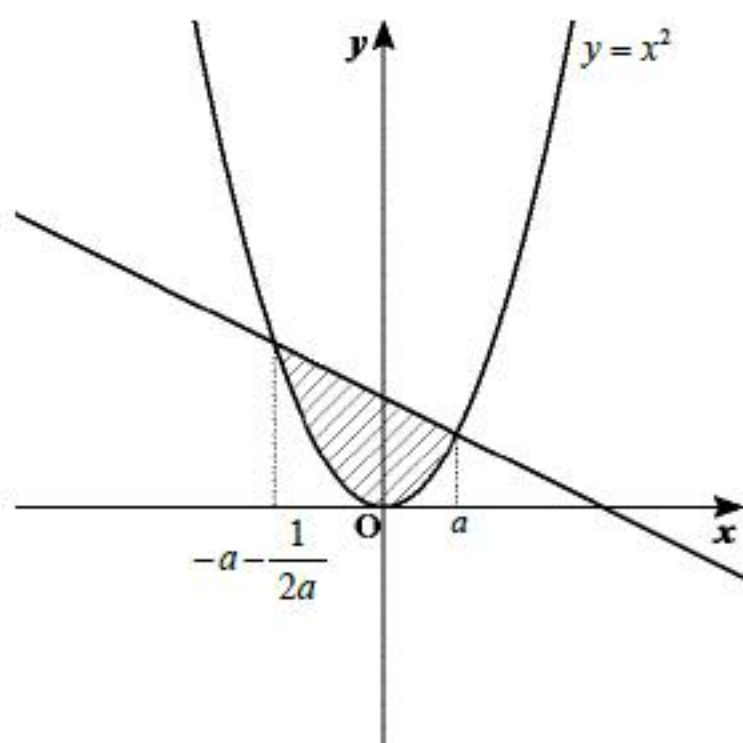
である。したがって、直線 ℓ の方程式は、

$$\ell: y = -\frac{1}{2a}(x-a) + a^2 = -\frac{1}{2a}x + a^2 + \frac{1}{2}$$

と求まる。直線 ℓ と曲線 C の交点の x 座標は、

$$\begin{aligned} x^2 &= -\frac{1}{2a}x + a^2 + \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow x^2 + \frac{1}{2a}x - a^2 - \frac{1}{2} &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-a)\left(x + a + \frac{1}{2a}\right) &= 0 \\ \therefore x &= a, -a - \frac{1}{2a} \end{aligned}$$

と求まる。



求めるのは前図斜線部の面積であり、それは、

$$\begin{aligned} S &= \int_{-a-\frac{1}{2a}}^a \left\{ \left(-\frac{1}{2a}x + a^2 + \frac{1}{2a} \right) - x^2 \right\} dx \\ &= \frac{1}{6} \left(a + a + \frac{1}{2a} \right)^3 \\ &= \frac{1}{6} \left(2a + \frac{1}{2a} \right)^3 \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{6} \left(2a + \frac{1}{2a} \right)^3$$

(2)

点 $A\left(-a - \frac{1}{2a}, \left(a + \frac{1}{2a}\right)^2\right)$, $B(a, a^2)$ とおく。点 A , B における曲線 C の接線を ℓ_A , ℓ_B とおく

と、

$$\begin{aligned} \ell_A: y &= 2\left(-a - \frac{1}{2a}\right)\left(x + a + \frac{1}{2a}\right) + \left(a + \frac{1}{2a}\right)^2 \\ &= -2\left(a + \frac{1}{2a}\right)x - \left(a + \frac{1}{2a}\right)^2 \\ \ell_B: y &= 2a(x-a) + a^2 = 2ax - a^2 \end{aligned}$$

となるので、点 P の x 座標は、

$$\begin{aligned} -2\left(a + \frac{1}{2a}\right)x - \left(a + \frac{1}{2a}\right)^2 &= 2ax - a^2 \\ \Leftrightarrow \left(4a + \frac{1}{a}\right)x &= -\left(\frac{1+4a^2}{4a^2}\right) \\ \therefore x &= -\frac{1}{4a} \end{aligned}$$

と求まる。以上より、点 P の座標は、

$$P\left(-\frac{1}{4a}, -a^2 - \frac{1}{2}\right)$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad P\left(-\frac{1}{4a}, -a^2 - \frac{1}{2}\right)$$

2.

(1)

$A \cap B$ のとき、全て表もしくは全て裏でなければよいので、

$$P(A \cap B) = 1 - p^3 - (1 - p)^3 = 1 - p^3 - 1 + 3p - 3p^2 + p^3 = 3p(1 - p)$$

となる。 $A \cup B$ のとき、全て裏でなければよいので、

$$P(A \cup B) = 1 - (1 - p)^3 = 3p - 3p^2 + p^3 = p(3 - 3p + p^2)$$

となる。 $\bar{A} \cap B$ のとき、全て表であればよいので、

$$P(\bar{A} \cap B) = p^3$$

となる。

$$(\text{答}) \quad P(A \cap B) = 3p(1 - p), P(A \cup B) = p(3 - 3p + p^2), P(\bar{A} \cap B) = p^3$$

(2)

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

であるから、 $\overline{A \cup B}$ は、

「裏と表のうち一方のみが出て、表はでない」

すなわち

「裏のみが出る」

を表す。(1)より、 $A \cap B$ は「全て裏もしくは全て表以外」を表しているから、 $(A \cap B) \cup (\overline{A \cup B})$

は、

「全て表となる場合以外」

を表す。したがって、その確率は、

$$P((A \cap B) \cup (\overline{A \cup B})) = 1 - p^3$$

となる。

$$(\text{答}) \quad P((A \cap B) \cup (\overline{A \cup B})) = 1 - p^3$$

(3)

表が出る数が1枚の時の確率は、

$${}_3C_1 p(1 - p)^2$$

であり、2枚の時の確率は、

$${}_3C_2 p^2(1 - p)$$

であり、3枚の時の確率は、

$$p^3$$

であるから、得点の期待値は、

$$3k \cdot p^3 + 2k \cdot 3p^2(1 - p) + k \cdot 3p(1 - p)^2 = 3kp$$

となる。これが $6p$ に等しいので、

$$k = 2$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad k = 2$$

3.

(1)

$$|\vec{x}_1| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

であるから、

$$\vec{b}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となる。 $|\vec{x}_2 - s\vec{b}_1|$ が最小となるとき、 $|\vec{x}_2 - s\vec{b}_1|^2$ も最小となる。

$$\begin{aligned} |\vec{x}_2 - s\vec{b}_1|^2 &= |\vec{x}_2|^2 - 2s\vec{x}_2 \cdot \vec{b}_1 + s^2|\vec{b}_1|^2 \\ &= 2 - 2s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s^2 \cdot 1 \\ &= s^2 - \sqrt{2}s + 2 \\ &= \left(s - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{3}{2} \end{aligned}$$

と変形できる。したがって、 $s = \frac{1}{\sqrt{2}}$ のとき、 $|\vec{x}_2 - s\vec{b}_1|$ は最小値 $\sqrt{\frac{3}{2}}$ をとる。このとき、

$$\vec{y}_2 = \vec{x}_2 - s\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad s = \frac{1}{\sqrt{2}}, \vec{y}_2 = \left(1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

(2)

$$|y_2| = \sqrt{1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

であるから、

$$\vec{b}_2 = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

となる。(1)と同様に考えて、

$$\begin{aligned} |\vec{x}_3 - t\vec{b}_1 - u\vec{b}_2|^2 &= |\vec{x}_3|^2 + t^2|\vec{b}_1|^2 + u^2|\vec{b}_2|^2 - 2t\vec{x}_3 \cdot \vec{b}_1 + 2tu\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_2 - 2u\vec{b}_2 \cdot \vec{x}_3 \\ &= 2 + t^2 + u^2 - 2t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &\quad + 2tu \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} - 2u \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= 2 + t^2 + u^2 - \sqrt{2}t - \sqrt{\frac{2}{3}}u \\ &= \left(t - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(u - \frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2 + \frac{4}{3} \end{aligned}$$

と変形できるので、 $|\vec{x}_3 - t\vec{b}_1 - u\vec{b}_2|$ は $(t, u) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ のとき最小値 $\frac{2}{\sqrt{3}}$ をとる。このとき、

$\vec{y}_3$ は、

$$\vec{y}_3 = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad (t, u) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right), \vec{y}_3 = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$$

(3)

$|\vec{y}_3| = \frac{2}{\sqrt{3}}$ であるから、

$$\vec{b}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

となる。このとき、

$$\begin{aligned} \vec{b}_1 \cdot \vec{b}_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = 0 \\ \vec{b}_2 \cdot \vec{b}_3 &= \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \\ \vec{b}_3 \cdot \vec{b}_1 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \end{aligned}$$

となる。したがって、 $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ は互いに直交する。

(証明終)

4.

(1)

OA=1より,

$$OB_1 = \frac{1}{\cos \theta}$$

である。したがって,

$$B_1B_2 = OB_1 \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad OB_1 = \frac{1}{\cos \theta}, B_1B_2 = \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta}$$

(2)

$$OB_n = \frac{1}{\cos \theta} OB_{n-1}$$

より,

$$OB_n = \frac{1}{\cos^n \theta}$$

である。よって,

$$B_nB_{n+1} = OB_n \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos^{n+1} \theta}$$

であるから,

$$(\text{長方形 } OB_nB_{n+1}C_{n+1}) = \frac{1}{\cos^n \theta} \cdot \frac{\sin \theta}{\cos^{n+1} \theta} = \frac{\sin \theta}{\cos^{2n+1} \theta}$$

と求まる。この式は $n=0$ のときも成り立つので、 n は0以上の整数である。

$$(\text{答}) \quad \frac{\sin \theta}{\cos^{2n+1} \theta}$$

(3)

(2)の結果より,

$$\begin{aligned} S &= \triangle OAB_1 + \triangle OB_1B_2 + \triangle OB_2B_3 + (\text{四角形 } OB_3B_4C_4) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin 30^\circ}{\cos^3 30^\circ} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin 30^\circ}{\cos^5 30^\circ} + \frac{\sin 30^\circ}{\cos^7 30^\circ} \\ &= \frac{1}{2} \tan 30^\circ \left(1 + \frac{1}{\cos^2 30^\circ} + \frac{1}{\cos^4 30^\circ} + \frac{2}{\cos^6 30^\circ} \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \left(1 + \frac{4}{3} + \frac{16}{9} + \frac{128}{27} \right) \\ &= \frac{239}{162} \sqrt{3} \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad S = \frac{239}{162} \sqrt{3}$$